

**EJERCICIOS  
DE  
LÓGICA MATEMÁTICA**

*Por Javier Carroquino Cañas*  
Profesor-Tutor de la U.N.E.D. (Ceuta)

---

Ceuta, 2001

## Introducción

Con este trabajo se pretende entrenar a los alumnos de la asignatura “**Lógica Matemática**” de **Ingeniería Técnica en Informática** de la U.N.E.D., para un aprendizaje de dicha asignatura y posterior superación de las pruebas correspondientes. Por eso, los ejercicios que aquí se resuelven, han sido propuestos, en su mayoría, en convocatorias anteriores, suponiendo un extraordinario recurso didáctico para los alumnos de dicha asignatura.

Esperemos que los métodos de resolución empleados y las explicaciones sean lo más comprensibles para el estudiante, que podrá comprobar, no se ha escatimado espacio con el fin de que las explicaciones sean lo más claras posibles.

Ceuta, junio de 2001

## Ejercicios de Lógica Matemática

### **Ejercicio 1.-** (propuesto en junio de 1997, 2ª semana)

Una propiedad del cuantificador universal es:

- a)  $\left[ \forall x Px \rightarrow \forall x Qx \right] \rightarrow \left[ \forall x (Px \rightarrow Qx) \right]$
- b)  $\left[ \forall x (Px \rightarrow Qx) \right] \rightarrow \left[ \forall x Px \rightarrow \forall x Qx \right]$
- c)  $\left[ \forall x Px \rightarrow \forall x Qx \right] \rightarrow \forall x Px$
- d)  $\left[ \forall x Px \rightarrow \forall x Qx \right] \rightarrow \forall x (Px \wedge Qx)$

**Solución:**

La ley de distribución del cuantificador universal por el condicional dice:

$$\left[ \forall x (Px \rightarrow Qx) \right] \rightarrow \left[ \forall x Px \rightarrow \forall x Qx \right]$$

Por tanto, la respuesta correcta es **b)**

### **Ejercicio 2.-** (propuesto en junio de 1997, 2ª semana)

$$Pa \leftrightarrow \exists y (a = y \wedge Py) \quad \text{es}$$

- a) Universalmente correcto
- b) Universalmente falsa
- c) Falsa en algún caso
- d) Ninguna de las anteriores.

**Solución:**

Es universalmente válida ya que :

$\exists y Py$  nos dice que existe algún elemento **y** que es P.

Eliminamos el cuantificador existencial introduciendo una constante de Skolem: **Pa**

**Pa** nos dice que **a** es P.

Por tanto, podemos expresar que  $Pa \leftrightarrow \exists y (a = y \wedge Py)$

La respuesta correcta es **a)**

### **Ejercicio 3.-** (propuesto en junio de 1997, 2ª semana)

Si decimos que “B no se deduce de A, si existe una interpretación (contraejemplo) que hace que A sea verdadero y B falso”, estamos:

- a) Equivocados
- b) Parcialmente acertados
- c) En lo cierto
- d) Es un disparate

**Solución:**

Decimos que  $A \rightarrow B$  es F cuando  $A=V$  y  $B=F$ , lo cual es cierto ya que la tabla de verdad correspondiente a  $A \rightarrow B$  sería:

A	B	$A \rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

La respuesta correcta es c)

**Ejercicio 4.-** (propuesto en junio de 1997, 2ª semana)

La forma clausulada de la expresión  $\forall x \exists y P(x,y) \vee \exists x Q(x)$  puede ser:

- a)  $P(x, f(x)) \vee Q(b)$
- b)  $P(a, f(a)) \vee Q(a)$
- c)  $P(f(y), y) \vee Q(a)$
- d)  $P(x, x) \vee Q(b)$

**Solución:**

- Eliminamos el cuantificador existencial  $\exists y$  afectado por un cuantificador universal  $\forall$ , lo cual hacemos introduciendo una función de Skolem (el otro  $\exists$  no está afectado por el  $\forall$ ):  

$$\forall x P(x, f(x)) \vee \exists x Q(x)$$
- Eliminamos el cuantificador universal, entendiéndose que la variable x está cuantificada universalmente:  

$$P(x, f(x)) \vee \exists x Q(x)$$
- Eliminamos el cuantificador existencial que queda, introduciendo una constante de Skolem:  

$$P(x, f(x)) \vee Q(b)$$

Conclusión: La respuesta correcta es a)

**Ejercicio 5.-** (propuesto en junio de 1997, 1ª semana)

Dados los dos razonamientos:

$$\begin{array}{l} 1^\circ.- \quad \exists x(Px \rightarrow Qx) \\ \quad \exists x(Qx \rightarrow Px) \\ \hline \quad \exists x(Px \wedge Qx) \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2^\circ.- \quad \exists x Px \\ \quad \exists x Qx \\ \hline \quad \exists x(Qx \wedge Px) \end{array}$$

- a) 2º es correcto y 1º incorrecto
- b) 1º es correcto y 2º incorrecto
- c) Ambos son correctos
- d) Ambos son incorrectos

**Solución:**

Veamos el razonamiento 1º:

P1:  $\exists x(Px \rightarrow Qx)$  Existe x tal que si x es P entonces x es Q.

P2:  $\exists x(Qx \rightarrow Px)$  Existe x tal que si x es Q entonces x es P.

C :  $\exists x (Px \wedge Qx)$  Existe un x que es P y es Q.

Intentemos resolverlo por refutación, es decir:  $P1 \wedge P2 \wedge \neg C$  deberá ser una contradicción, es decir, expresando las premisas y la negación de la conclusión en forma clausulada y resolviendo, el resultado final será la clausula vacía  $\lambda$ .

Veamos:

✎ Eliminamos los condicionales y negamos la conclusión:

P1:  $\exists x(\neg Px \vee Qx)$

P2:  $\exists x(\neg Qx \vee Px)$

$\neg C : \neg \exists x (Px \wedge Qx) \equiv \forall x \neg (Px \wedge Qx) \equiv \forall x (\neg Px \vee \neg Qx)$

✎ Eliminamos los cuantificadores  $\exists$  y  $\forall$ . En este caso hay que introducir constantes de Skolem:

P1:  $\neg Pa \vee Qa$

P2:  $\neg Qb \vee Pb$

$\neg C : \neg Px \vee \neg Qx$

✎ Resolvemos:

C1:  $\neg Pa$  Por resolución de P1 y  $\neg C$

C2:  $\neg Qb$  Por resolución de P2 y  $\neg C$

No es posible obtener la clausula vacía  $\lambda$  (no olvidemos que a y b son constantes y no garantizamos que  $a=b$ ).

Por tanto: El razonamiento 1º es incorrecto.

Veamos el razonamiento 2º:

P1:  $\exists x Px$  Existe x tal que x es P

P2:  $\exists x Qx$  Existe x tal que x es Q

C :  $\exists x (Px \wedge Qx)$  Existe un x que es P y es Q.

Intentemos resolverlo por refutación, es decir:  $P1 \wedge P2 \wedge \neg C$  deberá ser una contradicción, es decir, expresando las premisas y la negación de la conclusión en forma clausulada y resolviendo, el resultado final será la clausula vacía  $\lambda$ .

Veamos:

∞ Eliminamos los cuantificadores  $\exists$  y negamos la conclusión:

P1:  $Pa$

P2:  $Qb$

$\neg C : \neg Px \vee \neg Qx$

∞ Resolvemos:

C1:  $\neg Qa$  Por resolución de P1 y  $\neg C$

C2:  $\neg Pb$  Por resolución de P2 y  $\neg C$

No es posible obtener la clausula vacía  $\lambda$  (no olvidemos que a y b son constantes y no garantizamos que  $a=b$ ).

Por tanto: El razonamiento 2º es incorrecto.

Conclusión: Ambos razonamientos son incorrectos. La respuesta es d).

**Ejercicio 6.-** (propuesto en junio de 1997, 2ª semana)

Indique el razonamiento incorrecto:

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad p \vee \neg q \\ \quad \neg p \vee r \\ \hline \quad q \\ \hline \quad r \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{b)} \quad \neg p \vee \neg q \\ \quad p \vee q \\ \hline \quad r \\ \hline \quad \lambda \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{c)} \quad \neg p \vee r \vee q \\ \quad \neg r \\ \hline \quad \neg q \\ \hline \quad \neg p \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{d)} \quad \neg p \\ \quad q \vee p \\ \hline \quad \neg q \\ \hline \quad \lambda \end{array}$$

**Solución:**

Veamos a)

$$\begin{array}{l} \text{P1: } p \vee \neg q \\ \text{P2: } \neg p \vee r \\ \text{P3: } q \end{array}$$

Aplicamos la regla de resolución:

$$\text{C1: } \neg q \vee r \quad \text{de P1 y P2}$$

$$\text{B: } r \quad \text{de P3 y C1}$$

Por tanto: a) es correcto

Veamos b)

$$\begin{array}{l} \text{P1: } \neg p \vee \neg q \\ \text{P2: } p \vee q \\ \text{P3: } r \end{array}$$

Aplicamos la regla de resolución:

$$\text{C1: } \lambda \quad \text{de P1 y P2}$$

$$\text{C: } r \quad \text{de P3 y C1}$$

La conclusión es r y no  $\lambda$ .

Por tanto: b) es incorrecto

**Conclusión:** La respuesta correcta es b)

**Ejercicio 7.-**

Si eliminamos los cuantificadores en la expresión:  $\forall x (\exists y (Px \rightarrow Qy))$  queda:

$$\text{a)} \quad \neg Pa \vee Qb$$

$$\text{b)} \quad \neg Pa \vee Qa$$

$$\text{c)} \quad \neg Px \vee Qf(x)$$

d) Ninguno de los anteriores.

**Solución:**

■ Tenemos:  $\forall x (\exists y (Px \rightarrow Qy))$

■ Eliminamos el condicional:  $\forall x (\exists y (\neg Px \vee Qy))$

■ Eliminamos el  $\exists$ . Dado que está afectado por un  $\forall$ , introducimos una función de Skolem:  $\forall x (\neg Px \vee Qf(x))$

■ Eliminamos el cuantificador  $\forall$ :  $\neg Px \vee Qf(x)$

Por tanto: la respuesta correcta es c)



$$P1: \neg p \vee q$$

$$P2: p$$

$$P3: \neg q$$

Resolviendo:

$$C1: q \quad \text{de } P1 \text{ y } P2$$

$$C2: \neg p \quad \text{de } P1 \text{ y } P3$$

$$C3: \lambda \quad \text{de } C1 \text{ y } P3$$

$$C4: \lambda \quad \text{de } C2 \text{ y } P2$$

$$C: \lambda$$

**Conclusión primera:** El razonamiento A) es correcto.

Apliquemos el método de resolución al caso A):

$$P1: \neg p \vee q \quad \text{Hemos eliminado el condicional}$$

$$P2: p \quad \text{Es una sentencia que está en forma clausulada.}$$

Resolviendo:

$$C: q \quad \text{de } P1 \text{ y } P2$$

**Conclusión segunda:** El razonamiento B) es correcto

**Conclusión final:** Ambos razonamientos son correctos.

La respuesta correcta es d)

### Ejercicio 11.- (Reserva septiembre de 1997)

“Es posible que p sea necesario” equivale a “es posible que  $\neg p$  sea imposible”. Esta afirmación es:

- |                 |                              |
|-----------------|------------------------------|
| a) Cierta       | b) Falsa                     |
| c) Depende de p | d) Ninguna de las otras tres |

**Solución:**

$\neg \Diamond \neg p$	es necesario que p
$\Diamond \neg \Diamond \neg p$	es posible que p sea necesario
$\Diamond \neg p$	es posible que $\neg p$
$\neg \Diamond \neg p$	no es posible que no p (es imposible que $\neg p$ )
$\Diamond \neg \Diamond \neg p$	es posible que $\neg p$ sea imposible

Conclusión: Son equivalentes. La respuesta correcta es a)

### Ejercicio 12.- (Junio de 1997, 2ª semana)

Si  $A \cap B \neq \emptyset$  entonces (y aunque la recíproca no es cierta) se cumple:

- |  |                                       |
|--|---------------------------------------|
| a) $B = \emptyset$                       | b) $\bar{A} \cup \bar{B} = U$         |
| c) $\bar{A} \cup \bar{B} \neq \emptyset$ | d) $\bar{A} \cup \bar{B} = \emptyset$ |

**Solución:**

Hagamos un razonamiento ayudado de gráficos:

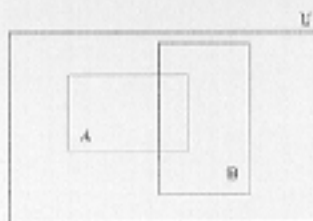


Figura 1



Figura 2

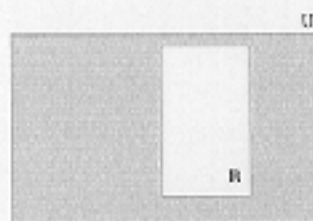


Figura 3

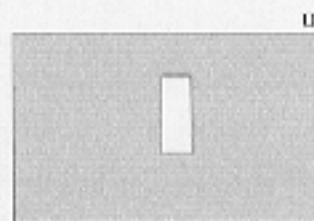


Figura 4

Figura 1: Tenemos el universo  $U$  y los conjuntos de  $U$   $A$  y  $B$  cuya intersección es no vacía.

Figura 2: La zona sombreada es el conjunto complementario del conjunto  $A$ .

Figura 3: La zona sombreada es el conjunto complementario del conjunto  $B$ .

Figura 4: La zona en blanco es  $A \cap B$  y la sombreada

$$\bar{A} \cup \bar{B}$$

Observamos que :

$$\bar{A} \cup \bar{B} \neq \Phi \quad y \quad \bar{A} \cup \bar{B} \neq U$$

**Conclusión:** La respuesta correcta es c)

### Ejercicio 13.- (Junio de 1997, 2ª semana)

Por dominio de una relación borrosa  $R(U, V)$  Se entiende (con  $x \in U$  y  $y \in V$ ):

- a)  $\{x \mid \mu(x) = \max_{y \in V} (\mu_R(x, y))\}$       b)  $\{x \mid \mu(x) = \min_{y \in V} (\mu_R(x, y))\}$   
 c)  $\{x \mid \mu(x) = \max_{x \in U} (\mu_R(x, y))\}$       d)  $\{x \mid \mu(x) = \min_{x \in U} (\mu_R(x, y))\}$

**Solución:**

Se definía, como una extensión de la definición de dominio en la lógica de las relaciones, el dominio de una relación borrosa binaria  $R(U, V)$ , el conjunto borroso **dom**  $R(U, V)$  que asigna a cada elemento del conjunto

$$\text{dom } R(U, V) = \left\{ x \mid \mu_{\text{dom } R}(x) = \max_{y \in V} \mu_R(x, y), \forall x \in U, \forall y \in V \right\}$$

**Conclusión:** La respuesta es a)

### Ejercicio 14.- (septiembre de 1998)

$\forall x R x \rightarrow \forall y P y$  es equivalente a:

- a)  $\forall x \exists y (R x \rightarrow P y)$       b)  $\exists x \forall y (R x \rightarrow P y)$   
 c)  $\exists x \forall y (P y \rightarrow R x)$       d)  $\forall y \exists x (P y \rightarrow R x)$

**Solución:**

Tenemos la sentencia  $\forall x R x \rightarrow \forall y P y$

Eliminamos el condicional:  $\neg \forall x Rx \vee \forall y Py$

Expresamos  $\neg \forall$  En función de  $\exists$ :  $\exists x \neg Rx \vee \forall y Py$

Extraemos los cuantificadores:  $\exists x \forall y (\neg Rx \vee Py)$

Expresamos  $\neg Rx \vee Py$  como un condicional:  $\exists x \forall y (Rx \rightarrow Py)$

Por tanto: La respuesta correcta es **b)**

### **Ejercicio 15.-** (septiembre de 1998)

Sean los conjuntos borrosos:  $S = \{ 0|0'5, 1|0'5, 2|0'5 \}$  y  $T = \{ 0|0, 1|1, 2|1 \}$

El complementario de  $S$  es :

- a)**  $S$                       **b)**  $T$                       **c)**  $T \cup S$                       **d)**  $T \cap S$

**Solución:**

Por definición:

$$\bar{S} = \text{Complementario de } S = \left\{ x \mid \mu_{\bar{S}} = 1 - \mu_S \right\} = \{ 0|1 - 0'5, 1|1 - 0'5, 2|1 - 0'5 \} = \{ 0|0'5, 1|0'5, 2|0'5 \} = S$$

Por tanto, la respuesta correcta es **a)**

### **Ejercicio 16.-** (septiembre de 1998)

Sean los conjuntos borrosos:  $S = \{ 0|0'5, 1|0'5, 2|0'5 \}$  y  $T = \{ 0|0, 1|1, 2|1 \}$

Se verifica:

- a)**  $S \not\subset T$                       **b)**  $T \subset S$                       **c)**  $S \cap T = \emptyset$                       **d)**  $S = T^c$

**Solución:**

Comprobemos si **a)** es verdadero o falso:

Por definición:  $S \subset T$  si  $\mu_S(x) \leq \mu_T(x) \quad \forall x \in U$

Para  $0 \in U \quad \mu_S(0) = 0'5 \leq 0 = \mu_T(0)$  es falso

Entonces  $S \subset T$  es falso y  $S \not\subset T$  es verdadero.

Conclusión: La respuesta es **a)**

### **Ejercicio 17.-** (septiembre de 1998)

Sean los conjuntos borrosos:  $S = \{ 0|0'5, 1|0'5, 2|0'5 \}$  y  $T = \{ 0|0, 1|1, 2|1 \}$

El conjunto  $S \cup S^c$  es igual a:

- a)** El universal  $U$  (todos los elementos con pertenencia 1).  
**b)**  $(S^c)^c$   
**c)**  $T$   
**d)**  $T \cap U$

**Solución:**

$$\begin{aligned} S \cup S^c &= \{ 0|0'5, 1|0'5, 2|0'5 \} \cup \{ 0|1-0'5, 1|1-0'5, 2|1-0'5 \} = \\ &= \{ 0|0'5, 1|0'5, 2|0'5 \} \cup \{ 0|0'5, 1|0'5, 2|0'5 \} = \\ &= \{ 0|\max(0'5,0'5), 1|\max(0'5,0'5), 2|\max(0'5,0'5) \} = \{ 0|0'5, 1|0'5, 2|0'5 \} = S \end{aligned}$$

Ahora bien:  $S^c = \{ 0|0'5, 1|0'5, 2|0'5 \} = S$

Por tanto:  $(S^c)^c = S^c = S$ , es decir:  $S \cup S^c = S = (S^c)^c$

Conclusión: La respuesta es **b)**

### **Ejercicio 18.-** (propuesto en junio del 2001, 1ª semana)

Si **P** :  $p \rightarrow q \vee r$  fuese una sentencia de la lógica trivalente de Lukasiewicz, entonces su valor de verdad para  $p = q = r = \frac{1}{2}$  Sería:

- |    |   |    |     |
|----|---|----|-----|
| a) | 0 | b) | 1/2 |
| c) | 2 | d) | 1   |

**Solución:**

Si construyésemos la tabla de verdad de **P** :  $p \rightarrow q \vee r$  y considerando que:

⇒ Valor de verdad de  $(q \vee r) = \max(q, r)$

⇒ Valor de verdad de  $(p \rightarrow q \vee r) = \min(1, 1 + (q \vee r) - p)$

Tendríamos:

p	q	r	$q \vee r$	$p \rightarrow q \vee r$
0	0	0	0	1
0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
.....	.....	.....	.....	.....
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
.....	.....	.....	.....	.....
1	1	1	1	1

El número total de interpretaciones en esta tabla serían  $3^3 = 27$

En nuestro caso  $p = q = r = \frac{1}{2}$  :

$$\begin{aligned} \text{Valor de } (q \vee r) &= \max(q, r) = \\ &= \max(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Valor de  $(p \rightarrow q \vee r) =$

$$\begin{aligned} \min(1, 1 + (q \vee r) - p) &= \\ = \min(1, 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}) &= \min(1, 1) = \\ = 1 \end{aligned}$$

Conclusión:

La respuesta es **d)**

### **Ejercicio 19.-** (propuesto en junio del 2001, 1ª semana)

Sea la sentencia **P** :  $(r \wedge q) \rightarrow \neg p$

¿Cuál es su forma clausulada?

- |    |                                |    |                                  |
|----|--------------------------------|----|----------------------------------|
| a) | $p \wedge q \wedge \neg r$     | b) | $\neg p \vee \neg q \vee \neg r$ |
| b) | $\neg(r \wedge q) \vee \neg p$ | d) | Ninguna de las anteriores.       |

**Solución:**

**P :**  $(r \wedge q) \rightarrow \neg p$  Es una sentencia que intentamos expresar en forma clausulada.

Eliminamos el condicional:  $\neg(r \wedge q) \vee \neg p$

Aplicamos una de las leyes de Morgan:  $(\neg r \vee \neg q) \vee \neg p$

Por la propiedad asociativa, podemos eliminar el paréntesis:  $\neg r \vee \neg q \vee \neg p$

Por la propiedad conmutativa de la disyunción ( $\vee$ ), conmutamos  $\neg r$  y  $\neg p$ :  $\neg p \vee \neg q \vee \neg r$

Conclusión: La respuesta es b)

**Ejercicio 20.-** (propuesto en junio del 2001, 1ª semana)

Dadas las sentencias:

$$P_1 : p \rightarrow q \vee r$$

$$P_2 : (r \wedge q) \rightarrow \neg p$$

Entonces,  $P_1 \wedge \neg P_2$  es:

a) Tautología

b) Contradicción

c) Indeterminada

d) Ninguna de ellas.

**Solución:**

Consideremos la sentencia  $P_1 : p \rightarrow q \vee r$

Eliminemos el condicional ( $\rightarrow$ ):  $P_1 : \neg p \vee (q \vee r) \equiv \neg p \vee q \vee r$

Consideremos la sentencia  $P_2 : (r \wedge q) \rightarrow \neg p$

Eliminemos el condicional ( $\rightarrow$ ):  $P_2 : \neg(r \wedge q) \vee \neg p$

Aplicamos una de las leyes de Morgan:  $P_2 : \neg r \vee \neg q \vee \neg p$

Negamos  $P_2$ :  $\neg P_2 : \neg(\neg r \vee \neg q \vee \neg p) \equiv \neg \neg r \wedge \neg \neg q \wedge \neg \neg p \equiv r \wedge q \wedge p$

Desglosamos la sentencia  $\neg P_2$  en tres cláusulas:

$$P_3 : r$$

$$P_4 : q$$

$$P_5 : p$$

De  $P_1$  y  $P_5$  obtenemos:  $P_6 : q \vee r$

De  $P_6$  y  $P_4$  obtenemos:  $P_7 : q \vee r$  igual a  $P_6$

De  $P_7$  y  $P_3$  obtenemos:  $P_8 : q \vee r$  igual a  $P_6$  y  $P_7$

Por tanto, la conclusión de  $P_1 \wedge \neg P_2$  es  $C : q \vee r$ , la cual tiene un valor de verdad que depende de los valores V o F que tengan p y q, es decir,  $q \vee r$  puede ser V o F.

Conclusión: La sentencia  $P_1 \wedge \neg P_2 : q \vee r$  es indeterminada. La respuesta es c)

Otra forma: Podemos construir la tabla de verdad para  $P_1 \wedge \neg P_2$ :

p	q	r	$\neg p$	$q \vee r$	$r \wedge q$	$p \rightarrow q \vee r$	$(r \wedge q) \rightarrow \neg p$	$\neg[(r \wedge q) \rightarrow \neg p]$	$[p \rightarrow q \vee r] \wedge \neg[(r \wedge q) \rightarrow \neg p]$
V	V	V	F	V	V	V	F	V	V
V	V	F	F	V	F	V	V	F	F
V	F	V	F	V	F	V	V	F	F
F	V	V	V	V	V	V	V	F	F
V	F	F	F	F	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F	V	V	F	F
F	F	V	V	V	F	V	V	F	F
F	F	F	V	F	F	V	V	F	F

Observamos que en la última columna, correspondiente a  $P_1 \wedge \neg P_2$  hay valores V y F, por lo que  $P_1 \wedge \neg P_2$  es una indeterminación, es decir, la respuesta es c)

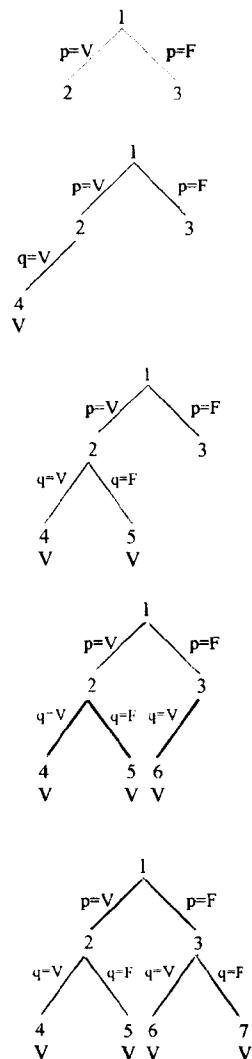
### Ejercicio 21.-

La sentencia  $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \leftrightarrow \neg p)$  es:

- a) Una tautología                      b) Una contradicción  
c) Una indeterminación              d) No es una sentencia.

#### Solución:

Comprobemos su valor de verdad mediante la construcción del árbol semántico.



#### Conclusión:

A la vista del análisis realizado en la columna derecha, podemos asegurar que se trata de una tautología.

La respuesta correcta es a)

Nodo 2:  $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \leftrightarrow \neg p)$

V                      FV

no podemos decidir el valor de la sentencia

Nodo 3:  $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \leftrightarrow \neg p)$

F                      VF

no podemos decidir el valor de la sentencia

Nodo 4:  $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \leftrightarrow \neg p)$

V    V    FV    FV

V                      V

V

Cuando  $p=V$  y  $q=V$ , la sentencia es V

Nodo 5:  $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \leftrightarrow \neg p)$

V    F    VF    FV

F                      F

V

Cuando  $p=V$  y  $q=F$ , la sentencia es V

Nodo 6:  $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \leftrightarrow \neg p)$

F    V    FV    VF

F                      F

V

Cuando  $p=F$  y  $q=V$ , la sentencia es V

Nodo 7:  $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \leftrightarrow \neg p)$

F    F    VF    VF

V                      V

V

Cuando  $p=F$  y  $q=F$ , la sentencia es V

**Ejercicio 22.-** (propuesto en junio del 2001, 2ª semana)

Si  $P2 : \neg p \rightarrow (r \wedge q)$  es una sentencia, V es tautología y F es absurdo o contradicción, entonces la frase  $F \leftarrow \neg (P2 \rightarrow V)$  Es:

- a) V                      b) F                      c) Indeterminada                      d) Es V y F

**Solución:**

☞ Analicemos la sentencia  $P2$  :

● Si  $p=V$ ,  $r=V$  y  $q=V$ , tenemos:  
Es decir,  $P2$  es V

$P2 : \neg p \rightarrow (r \wedge q)$   
V                      V V  
F                      V  
V

● Si  $p=F$ ,  $r=V$  y  $q=F$ , tenemos:  
Es decir,  $P2$  es F

$P2 : \neg p \rightarrow (r \wedge q)$   
F                      V F  
V                      F  
F

Por tanto,  $P2$  es indeterminada, ya que según la interpretación tomará el valor V o F.

☞ Analicemos  $P2 \rightarrow V$  :

○ Supongamos que  $P2$  es V. Entonces:  
Es decir,  $P2 \rightarrow V$  es V

$P2 \rightarrow V$   
V                      V  
V

○ Supongamos que  $P2$  es F. Entonces:  
Es decir,  $P2 \rightarrow V$  es V

$P2 \rightarrow V$   
F                      V  
F

Por tanto,  $P2 \rightarrow V$  es indeterminada (puede ser V o F)

☞ Analicemos  $F \leftarrow \neg (P2 \rightarrow V)$  :

■ Si  $P2 \rightarrow V$  es V, entonces:  
Es decir, la frase es F

$F \leftarrow \neg (P2 \rightarrow V)$   
F                      V  
F

■ Si  $P2 \rightarrow V$  es F, entonces:  
Es decir, la frase es V

$F \leftarrow \neg (P2 \rightarrow V)$   
F                      F  
V

**Conclusión:** La frase puede ser V o F, es decir, indeterminada.  
La respuesta correcta es c)

**Ejercicio 23.-**

Sean las sentencias:

S:  $p \wedge q$

T:  $\neg(\neg p \vee \neg q)$

R:  $\neg(p \rightarrow \neg q)$

Entonces:

- a) Todas son contradicciones      b) Son equivalentes entre sí  
c) No son equivalentes entre sí      d) Ninguna de las anteriores respuestas.

**Solución:**

✗ Está claro que todas no son contradicciones porque sus valores de verdad depende de la interpretación que demos a sus componentes.

Por ejemplo: Para  $p=V$  y  $q=V$ ,  $p \wedge q$  es  $V$ .

Para  $p=V$  y  $q=F$ ,  $p \wedge q$  es  $F$ . Es decir, S no es contradicción.

✗ Veamos si son equivalentes entre sí. Para ello veremos si tienen la misma tabla de verdad, es decir, tienen los mismos valores de verdad para las mismas interpretaciones.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(\neg p \vee \neg q)$	$p \rightarrow \neg q$	$\neg(p \rightarrow \neg q)$
V	V	F	F	V	F	V	F	V
V	F	F	V	F	V	F	V	F
F	V	V	F	F	V	F	V	F
F	F	V	V	F	V	F	V	F
				(1)		(2)		(3)

Nótese como las tres columnas marcadas con (1), (2) y (3) correspondientes a las sentencias S, T y R son iguales, lo cual significa que son equivalentes entre sí.

Conclusión: La respuesta correcta es **b)**

**Ejercicio 24.-**

Dadas las sentencias  $S: p \wedge (\neg p)$  y  $R: \neg[(p \wedge q) \rightarrow p]$ , entonces:

- a) Son tautologías      b) Son contradicciones  
c) Son indeterminadas      d) Sólo una es indeterminada.

**Solución:**

Construyamos las tablas de verdad de ambas sentencias para compararlas:

p	q	$\neg p$	$p \wedge (\neg p)$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow p$	$\neg[(p \wedge q) \rightarrow p]$
V	V	F	F	V	V	F
V	F	F	F	F	V	F
F	V	V	F	F	V	F
F	F	V	F	F	V	F
				(1)		(2)

Nótese como las columnas marcadas como (1) y (2) correspondientes a las sentencias S y R tienen para cada una de las cuatro interpretaciones el valor F, es decir, son contradicciones.

Conclusión: La respuesta correcta es **b)**

**Ejercicio 25.-** (propuesto en junio de 2001, 1ª semana)

Dada la sentencia  $P : (r \wedge q) \rightarrow \neg p$ , su forma clausulada es:

- a)  $\neg p \vee \neg q \vee \neg r$       b)  $\neg(r \wedge q) \vee \neg p$   
 c)  $p \wedge q \wedge \neg r$       d) Ninguna de las anteriores

**Solución:**

Expresemos la sentencia  $P$  en forma clausulada:

- ❖ Primero eliminamos el condicional:  $P : \neg(r \wedge q) \vee \neg p$
- ❖ Aplicamos una de las leyes de Morgan al paréntesis:  $P : (\neg r \vee \neg q) \vee \neg p$
- ❖ Por la propiedad asociativa, quitamos paréntesis:  $P : \neg r \vee \neg q \vee \neg p$
- ❖ Por la propiedad conmutativa:  $P : \neg p \vee \neg q \vee \neg r$

Conclusión: La respuesta correcta es **a)**

**Ejercicio 26.-**

La forma clausulada de  $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$  se corresponde con:

- a)  $\neg p$       b)  $p \wedge q$   
 c)  $\neg p \vee p$       d) Ninguna de las anteriores

**Solución:**

- ☺ A simple vista puede apreciarse que la sentencia dada es una tautología, es decir, puede considerarse como un teorema, por lo que su forma clausulada debe serlo también. De las opciones que nos dan, la única que es tautología es c), por lo que la respuesta correcta es **c)**.
- ☺ No obstante, expresemos la sentencia en forma clausulada:
  - a) Eliminamos el condicional externo:  $\neg[(p \rightarrow q) \wedge p] \vee q$
  - b) Eliminamos el condicional interno:  $\neg[(\neg p \vee q) \wedge p] \vee q$
  - c) Introduzcamos la negación dentro del corchete:  $[\neg(\neg p \vee q) \vee \neg p] \vee q$
  - d) Introducimos  $\neg$  dentro del paréntesis:  $[(p \wedge \neg q) \vee \neg p] \vee q$
  - e) Aplicamos una propiedad distributiva:  $[(p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p)] \vee q$
  - f) Nuevamente la distributiva:  $[(p \vee \neg p) \vee q] \wedge [(\neg q \vee \neg p) \vee q]$

- a) P2 se deduce o es consecuencia de P1, pero no P2 de P1  
b) P1 se deduce o es consecuencia de P2, pero no P1 de P2  
c) P1 se deduce o es consecuencia de P2 y P2 de P1  
d) Ni P1 de P2 ni P2 de P1.

Tenemos que ver si  $P1 \rightarrow P2$  y  $P2 \rightarrow P1$  son tautologías o no lo son y con arreglo a ello tomar una decisión. Para ello construimos la siguiente tabla de verdad:

p	q	r	$q \wedge r$	$p \rightarrow (q \wedge r)$	$r \leftrightarrow p$	$[p \rightarrow (q \wedge r)] \rightarrow (r \leftrightarrow p)$	$(r \leftrightarrow p) \rightarrow [p \rightarrow (q \wedge r)]$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	F	V	V
V	F	V	F	F	V	V	F
F	V	V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	F	F	V	V
F	V	F	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	F	F	V
F	F	F	F	V	V	V	V

Observando la última columna de la tabla vemos que la primera sentencia (**P1**  $\rightarrow$  **P2**) no es tautología y la segunda (**P2**  $\rightarrow$  **P1**) tampoco, es decir, ni P2 se deduce de P1 ni P1 se deduce de P2.

Conclusión: La respuesta correcta es **d)**

### Ejercicio 30.-

Una ley de Morgan es:

a)  $(\neg \neg p \leftrightarrow p)$

b)  $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

c)  $(\neg p \wedge \neg q) \leftrightarrow \neg(p \wedge q)$

d)  $\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$

**Solución:**

Enunciaremos las dos leyes de Morgan:

UNA: La negación de una disyunción ( $\vee$ ) “equivale” a la conjunción ( $\wedge$ ) de las negaciones:

$$\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$$

DOS: La negación de una conjunción ( $\wedge$ ) “equivale” a la disyunción ( $\vee$ ) de las negaciones:

$$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$$

Conclusión: La respuesta es **b)**

### Ejercicio 31.-

Si  $p \oplus q$ , entonces se infiere:

a)  $p \leftrightarrow \neg q$

b)  $p \wedge q$

c)  $p \leftrightarrow q$

d)  $q \leftrightarrow p$

**Solución:**

Inferir es sacar una consecuencia de algo. En este caso, si la sentencia  $p \oplus q$  es V, significa que, o bien ocurre la proposición p, o bien ocurre la proposición q, pero no ambas. De esto último podemos deducir que “*Si p entonces no q*” y “*Si q entonces no p*”. En nuestro caso podemos deducir que  $(p \oplus q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$  es una tautología:

Conclusión: La respuesta correcta es **a)**

NOTA: Comprobemos que la sentencia  $(p \oplus q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$  es una tautología.

p	q	$\neg q$	$p \oplus q$	$p \rightarrow \neg q$	$(p \oplus q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$
V	V	F	F	F	V
V	F	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	V	V

Nótese como se trata de una tautología.

### Ejercicio 32.-

La regla de resolución es una aplicación sistemática de la tautología:

- a)  $((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow r)) \rightarrow (q \vee r)$       b)  $p \rightarrow p$   
 c)  $(p \vee q) \rightarrow (q \vee \neg q \vee p)$       d)  $p \vee q \vee \neg q$

**Solución:**

Investiguemos el apartado a):

⊗ Expresemos los condicionales del antecedente en forma clausulada:

$p \rightarrow q$  en forma clausulada es .....  $\neg p \vee q$

$\neg p \rightarrow r$  en forma clausulada es ....  $\neg \neg p \vee r$ , es decir,  $p \vee r$

⊗ El antecedente esta formado por dos premisas:

P1:  $\neg p \vee q$

P2:  $p \vee r$

Obsérvese que en una esta p negada y en otra sin negar.

⊗ Apliquemos la regla de resolución para obtener la resolvente:

C1:  $q \vee r$  (consecuencia lógica de P1 y P2)

⊗ Es decir, hemos llegado a la conclusión de que “*Si  $(p \rightarrow q)$  y  $(\neg p \rightarrow r)$  entonces  $(q \vee r)$* ” que es el apartado a).

Conclusión: La respuesta correcta es **a)**

### Ejercicio 33.-

La forma clausulada de  $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$  es:

- a)  $(p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s)$       b) Ya está en forma clausulada.  
 c)  $(p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)$       d)  $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)$

**Solución:**

Expresemos  $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$  en forma clausulada, aplicando la propiedad distributiva:

$$(p \wedge q) \vee (r \wedge s) \rightarrow [p \vee (r \wedge s)] \wedge [q \vee (r \wedge s)] \rightarrow [(p \vee r) \wedge (p \vee s)] \wedge [(q \vee r) \wedge (q \vee s)] \rightarrow (p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)$$

La última expresión corresponde a la forma clausulada de  $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$ .

Conclusión: La respuesta correcta es **c)**

### Ejercicio nº 34.-

Sean:

$$A: p \wedge q \rightarrow r \vee p$$

$$B: p \leftrightarrow (r \wedge q)$$

Señale la respuesta correcta:

- a) B es consecuencia de A
- b)  $\neg B \wedge A$  es consecuencia de A
- c) A es consecuencia de B
- d)  $B \wedge \neg A$  es una consecuencia de B

**Solución:**

Nos piden que comprobemos lo siguiente:

- ☞ a) ¿ Es  $A \rightarrow B$  una tautología ?
- ☞ b) ¿ Es  $A \rightarrow \neg B \wedge A$  una tautología ?
- ☞ c) ¿ Es  $B \rightarrow A$  una tautología ?
- ☞ d) ¿ Es  $B \rightarrow B \wedge \neg A$  una tautología ?

Para decidir construimos la siguiente tabla de verdad:

p	q	r	$p \wedge q$	$r \vee p$	$r \wedge q$	$p \wedge q \rightarrow r \vee p$	$p \rightarrow r \wedge q$	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$A \rightarrow \neg B \wedge A$	$B \rightarrow B \wedge \neg A$
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V		
V	V	F	V	V	F	V	F	F	V		
V	F	V	F	V	F	V	F		V		
F	V	V	F	V	V	V	F		V		
V	F	F	F	V	F	V	F		V		
F	V	F	F	F	F	V	V		V		
F	F	V	F	V	F	V	V		V		
F	F	F	F	F	F	V	V		V		

Nótese lo siguiente:

- ☞ La cuarta y quinta columna de la zona central de la tabla corresponden a las sentencias A y B respectivamente.
- ☞ La zona derecha de la tabla corresponde a las sentencias a tratar en a), b), c) y d).
- ☞ La columna correspondiente a  $A \rightarrow B$  la hemos interrumpido porque al aparecer F en la segunda fila ya sabemos que  $A \rightarrow B$  no es tautología y por tanto a) no es correcta.
- ☞ Al concluir la columna correspondiente a  $B \rightarrow A$  vemos que es tautología y por tanto estamos en condiciones de tomar una decisión si necesidad de seguir el proceso.

Conclusión: La respuesta correcta es **c)**

**Ejercicio nº 35.-**

De las premisas:

$$P1: A \rightarrow B$$

$$P2: B \rightarrow C$$

$$P3: A \leftrightarrow D$$

Inferimos:

**a)**  $B \leftrightarrow D$

**b)**  $D \leftrightarrow C$

**c)**  $D \rightarrow C$

**d)** Ninguna anteriores

**Solución:**Consideraremos las “*Reglas de Inferencia del Cálculo de Proposiciones*”

$$P1: A \rightarrow B$$

$$P2: B \rightarrow C$$

$$P3: A \leftrightarrow D$$

$$C1: (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)$$

$$P4: (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$$

$$C2: A \rightarrow C$$

---

$$C: D \rightarrow C$$

Por la *Regla de Unión* obtenemos esta conclusión que utilizamos como premisa.La *Regla de Inserción* nos permite utilizar como premisa esta ley (tautología) transitiva.La *Regla de separación* nos permite obtener esta conclusión que utilizamos como premisa.La *Regla de Intercambio* nos permite usar el bicondicional de P3 para cambiar A por D en C2Conclusión: La respuesta correcta es **c)****OBSERVACIÓN:**

En este caso la respuesta correcta podría deducirse “a simple vista” sin más que realizar el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{de } A \rightarrow B & \text{deducimos que } A \rightarrow B & \\
 \updownarrow & \downarrow & \updownarrow \quad \downarrow \\
 D & C & D \rightarrow C \quad \text{es decir: } D \rightarrow C
 \end{array}$$

**Ejercicio nº 36.-** (propuesto en junio de 2001, 2ª semana)

Dadas  $P1: (q \vee r) \rightarrow p$

$$P2: \neg p \rightarrow (r \wedge q)$$

Entonces  $P1 \oplus P2$  es:

**a)** Indeterminación

**b)** Tautología

**c)** Contradicción

**d)** No es satisfacible

**Solución:**Resolveremos construyendo la tabla de verdad de  $P1 \oplus P2$ . En este caso, dado que depende de tres variables proposicionales (p, q y r), hay ocho interpretaciones distintas.

p	q	r	$\neg p$	$q \vee r$	$r \wedge q$	$(q \vee r) \rightarrow p$	$\neg p \rightarrow (r \wedge q)$	$P1 \oplus P2$
V	V	V	F	V	V	V	V	F
V	V	F	F	V	F	V	V	F
V	F	V	F	V	F	V	V	F
F	V	V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	V	V	F
F	V	F	V	V	F	F	F	F
F	F	V	V	V	F	F	F	F
F	F	F	V	F	F	V	F	V

La última columna de la tabla nos da los valores de  $P1 \oplus P2$  para las distintas interpretaciones, así que podemos asegurar que  $P1 \oplus P2$  es una indeterminación.

Conclusión: La respuesta correcta es **a)**

### Ejercicio nº 37.-

De las premisas  $P1 : p \vee \neg q$  y  $P2 : \neg p$  se deduce:

- a)  $q$                       b)  $\neg q$                       c)  $\neg p \wedge q$                       d)  $p$

**Solución:**

Emplearemos la *Regla de Resolución* para comprobar si sale alguna de las conclusiones propuestas. Veamos:

$P1 : p \vee \neg q$

$P2 : \neg p$

C:  $\neg q$  (Clausula Resolvente). La obtenemos de  $P1$  y de  $P2$  mediante la *Regla de Resolución*

Conclusión: La respuesta correcta es **b)**

### Ejercicio nº 38.-

La Regla de Resolución es una aplicación sistemática de la tautología:

a)  $[(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow r)] \rightarrow (q \vee r)$

b)  $p \rightarrow p$

c)  $(p \vee q) \rightarrow (q \vee \neg q \vee p)$

c)  $p \vee q \vee \neg q$

**Solución:**

Fijémonos en a). Podemos expresar el antecedente como dos premisas en forma clausulada:

$P1 : \neg p \vee q$

$P2 : p \vee r$

C:  $q \vee r$  (Clausula Resolvente). Observamos que es el consecuente de la tautología a)

Conclusión: La respuesta correcta es **a)**

**Ejercicio nº 39.-**

La negación de la sentencia:  $\exists xAx \rightarrow \forall x\neg Bx$  es:

- a)  $\exists xAx \vee \forall x\neg Bx$                       b)  $\forall x\neg Ax \wedge \neg \forall xBx$   
 c)  $\neg \exists xAx \rightarrow \forall xBx$                       d)  $\exists xAx \wedge \exists xBx$

**Solución:**

Negemos la sentencia dada y por eliminación del condicional intentaremos llegar a alguna de las alternativas:

$$\begin{aligned} \neg(\exists xAx \rightarrow \forall x\neg Bx) &\equiv \neg(\neg \exists xAx \vee \forall x\neg Bx) \equiv (\neg \neg \exists xAx \wedge \neg \forall x\neg Bx) \equiv \\ &\equiv (\exists xAx \wedge \exists x\neg \neg Bx) \equiv \exists xAx \wedge \exists xBx \end{aligned}$$

Conclusión: La respuesta correcta es **d)**

**Ejercicio nº 40.-**

La contraria de la sentencia  $\neg \exists xRx \rightarrow \forall x\neg Sx$  es:

- a)  $\forall xRx \vee \exists xSx$                       b)  $\forall x\neg Sx \rightarrow \neg \exists xRx$   
 c)  $\forall x\neg Rx \vee \exists xSx$                       d) *Ninguna de las anteriores*

**Solución:**

La contraria de una sentencia de la forma  $A \rightarrow B$  es  $\neg A \rightarrow \neg B$  (ojo, no es su negación) En nuestro caso:

$$\begin{aligned} (\neg \neg \exists xRx \rightarrow \neg \forall x\neg Sx) &\equiv (\exists xRx \rightarrow \neg \forall x\neg Sx) \equiv (\neg \exists xRx \vee \neg \forall x\neg Sx) \equiv \\ &\equiv (\forall x\neg Rx \vee \exists x\neg \neg Sx) \equiv (\forall x\neg Rx \vee \exists xSx) \end{aligned}$$

Conclusión: La respuesta correcta es **c)**

**Ejercicio nº 41.-**

La contraria de la sentencia  $\exists x(Px \rightarrow Qx)$  es:

- a)  $\forall x(\neg Px \wedge Qx)$                       b)  $\forall x(Px \vee \neg Qx)$   
 c)  $\neg \exists x(\neg Px \rightarrow \neg Qx)$                       c) *Ninguna de las anteriores*

**Solución:**

En este caso, en el que la operación fundamental no es el condicional ( $\rightarrow$ ), la contraria de la

sentencia es  $\neg \exists x (Px \rightarrow Qx)$ .

Operemos con esta expresión para observar si llegamos a alguna de las alternativas:

$$\begin{aligned}\neg \exists x (Px \rightarrow Qx) &\equiv \forall x \neg (Px \rightarrow Qx) \equiv \forall x \neg (\neg Px \vee Qx) \equiv \\ &\equiv \forall x (\neg \neg Px \wedge \neg Qx) \equiv \forall x (Px \wedge \neg Qx)\end{aligned}$$

Observamos que no coincide con ninguna de las alternativas a) , b) o c).

Conclusión: La respuesta correcta es **d)**

### Ejercicio nº 42.-

Consideremos el universo  $U = \{ a, e, i, o, u \}$  y la propiedad  $P$ : “Ser letra vocal”

Sean las sentencias:

$$S_1 : \forall x Px \quad \text{y} \quad S_2 : \neg \exists x (\neg Px)$$

Entonces:

- |  |                                  |
|--|----------------------------------|
| <b>a)</b> Ambas son falsas                 | <b>b)</b> Ambas son verdaderas   |
| <b>c)</b> Una es falsa y la otra verdadera | <b>d)</b> No es posible decidir. |

**Solución:**

Analicemos  $S_1$ : “Todo elemento  $x$  de  $U$  es letra vocal”

A simple vista podemos decidir que es verdad.

Analicemos  $S_2$ : “No existe un elemento de  $U$  que no sea letra vocal”

A simple vista podemos decidir que es verdad.

Por tanto, las dos sentencias son ciertas.

Conclusión: La respuesta correcta es **b)**

Resolvamos mediante un razonamiento más formal:

☞ Analicemos  $S_1 : \forall x Px$

Como el universo  $U$  es finito (5 elementos), podemos decir que la sentencia  $S_1$  es equivalente a la sentencia proposicional:  $Pa \wedge Pe \wedge Pi \wedge Po \wedge Pu$

Vemos que:

- \*  $Pa$  = “La  $a$  es una letra vocal” es una proposición Verdadera
- \*  $Pe$  = “La  $e$  es una letra vocal” es una proposición Verdadera
- \*  $Pi$  = “La  $i$  es una letra vocal” es una proposición Verdadera
- \*  $Po$  = “La  $o$  es una letra vocal” es una proposición Verdadera
- \*  $Pu$  = “La  $u$  es una letra vocal” es una proposición Verdadera

Por lo visto en lógica de proposiciones, aseguramos que :

$S_1 : \forall x Px \equiv Pa \wedge Pe \wedge Pi \wedge Po \wedge Pu$  es verdadera.

☞ Analicemos  $S_2 : \neg \exists x (\neg Px)$

$$\neg \exists x (\neg Px) \equiv \forall x \neg (\neg Px) \equiv \forall x (\neg \neg Px) \equiv \forall x Px$$

Observamos que la sentencia  $S_2$  es equivalente a  $S_1$  y por tanto es verdadera.

Conclusión: Como ambas son verdaderas, la respuesta correcta es **b)**

**Ejercicio nº 43.-**

La frase  $(\exists xPx \rightarrow \exists xQx) \rightarrow \exists x(Px \rightarrow Qx)$  y su recíproca (con el condicional principal cambiado de sentido) son respectivamente:

- a) Verdadera y falsa                      b) Verdadera y verdadera  
c) Falsa y verdadera                      d) Falsa y falsa

**Solución:**

La “ley de contracción del cuantificador particular ( $\exists$ ) por el condicional” dice:

$$(\exists xPx \rightarrow \exists xQx) \rightarrow \exists x(Px \rightarrow Qx)$$

en vez de decir:

$$(\exists xPx \rightarrow \exists xQx) \leftrightarrow \exists x(Px \rightarrow Qx)$$

lo que nos indica que es cierta la frase enunciada, pero no su recíproca.

Conclusión: La respuesta correcta es a)

No obstante daremos una explicación que pretende ser más convincente:

⇒ Eliminemos el condicional en el antecedente:

$$(\exists xPx \rightarrow \exists xQx) \equiv (\neg \exists xPx \vee \exists xQx) \equiv (\forall x \neg Px \vee \exists xQx)$$

Es decir: “Ningún x es P o algún x es Q”

⇒ Eliminemos el condicional en el consecuente:

$$\exists x(Px \rightarrow Qx) \equiv \exists x(\neg Px \vee Qx)$$

Es decir: “Existe algún x que no es P o es Q”

Deducimos:

$$\text{Si } \left\{ \begin{array}{c} \text{ningun x es P} \\ \text{o} \\ \text{algun x es Q} \end{array} \right\} \rightarrow \text{Algun x } \left\{ \begin{array}{c} \text{no es P} \\ \text{o} \\ \text{es Q} \end{array} \right\}$$

puede apreciarse que es cierta.  
Es decir, la directa es verdadera

$$\text{Si algun x } \left\{ \begin{array}{c} \text{no es P} \\ \text{o} \\ \text{es Q} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{ningun x es P} \\ \text{o} \\ \text{algun x es Q} \end{array} \right\}$$

Veamos que esta sentencia  
(recíproca de la dada) no es  
cierta en general.

Para ello consideremos el siguiente ejemplo:

Universo = U = {a, e, i, o, u}

Elementos que tienen la propiedad P = {a, e, i}

Elementos que tienen la propiedad Q =  $\emptyset$ , es decir, ningún elemento tiene la propiedad Q

Elementos que no tiene la propiedad P =  $\neg P$  = {o, u}

Consideremos el elemento o de U, el cual no es P

Vemos que o no es P o es Q, es decir, verifica el antecedente.

Sin embargo, el consecuente no es cierto, ya que no podemos asegurar que ningún x es P o

algún  $x$  es  $Q$ , ya que “ningún  $x$  es  $P$ ” es falso (porque  $a$  es  $P$ ) y “algún  $x$  es  $Q$ ” también es falso (porque nadie es  $Q$ ).

Por tanto, la recíproca es falsa.

Conclusión: La respuesta correcta es **a)**

#### **Ejercicio nº 44.-** (propuesto en junio de 2001)

Dada la sentencia  $P : \exists x \forall y (Qx \rightarrow \neg Rxy)$

¿Cuántas funciones de Skolem (no constantes) hacen falta introducir en  $P$  para ponerla en forma clausulada?

- |                   |                   |
|-------------------|-------------------|
| <b>a)</b> Ninguna | <b>b)</b> Una     |
| <b>c)</b> Dos     | <b>d)</b> Catorce |

#### **Solución:**

Expresemos la sentencia  $P$  en forma clausulada:

① Eliminamos el condicional.  $P : \exists x \forall y (\neg Qx \vee \neg Rxy)$

② Eliminamos el cuantificador existencial. Nótese que el único que hay está fuera del alcance (no está afectado) del cuantificador universal. En este caso se elimina substituyendo la variable cuantificada ( $x$ ) por una constante de Skolem. ( $a$ ).

$$P : \forall y (\neg Qa \vee \neg Ray)$$

③ Eliminamos el cuantificador existencial. En este caso el  $\forall$  se elimina “sin más”, entendiéndose que la variable  $y$  está cuantificada universalmente.

$$P : \neg Qa \vee \neg Ray$$

Esta última expresión es la sentencia  $P$  en forma clausulada (se trata de una clausula). Nótese que tiene una constante de Skolem ( $a$ ) y una variable ( $y$ ), es decir, no tiene funciones de Skolem.

Conclusión: La respuesta correcta es **a)**

#### **Ejercicio nº 45.-**

Si en la sentencia  $\forall x \exists y Pxy$  eliminamos los cuantificadores, queda:

- a)** Una variable normal y una variable de Skolem
- b)** Una variable de Skolem y una función de Skolem
- c)** Una variable normal y una función de Skolem
- d)** Ninguna de las anteriores.

#### **Solución:**

Vamos a eliminar los cuantificadores:

✂ Primero eliminamos  $\exists$ . Como está afectado por un  $\forall$ , se introduce una unión de Skolem, ya que “ese  $y$ ” depende de  $x$ , es decir, está en función de “quién sea  $x$ ”:

$$\forall x Pxf(x)$$

☞ Ahora podemos eliminar el  $\forall$ , entendiendo que la variable  $x$  está cuantificada por  $\forall$ :  
 $Pxf(x)$

En definitiva:  $x$  es una variable normal y  $f(x)$  es una función de Skolem.  
 Conclusión: La respuesta correcta es **c)**

**Ejercicio nº 46.-** (propuesto en septiembre de 1998)

Sea la expresión  $Q \equiv \forall x(\neg Px \vee \forall yRyx)$

La forma clausulada de  $Q$  es:

- |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|
| a) $\neg Px \wedge Ryx$  | b) $\neg Px \vee Ryx$    |
| c) $\neg Px \vee Ryf(x)$ | d) $\neg Px \vee Rf(x)x$ |

**Solución:**

☆ Tenemos  $\forall x(\neg Px \vee \forall yRyx)$

☆ Sacamos fuera el cuantificador que está dentro del paréntesis:

$$\forall x \forall y (\neg Px \vee Ryx)$$

☆ Eliminamos los dos cuantificadores, dando por hecho que ambas variables ( $x$  e  $y$ ) están cuantificadas.

$$\neg Px \vee Ryx$$

Esta expresión es una clausula, es decir, la forma clausulada de  $Q$

Conclusión: La respuesta correcta es **b)**

**Ejercicio nº 47.-** (propuesto en septiembre de 1998)

Sean las expresiones:

$$Q_1 \equiv \forall xPx \quad Q_2 \equiv \forall x \forall yRxy \quad Q_3 \equiv \forall x(\neg Px \vee \forall yRyx)$$

De  $Q_1$  y  $Q_2$  se deduce:

- |          |               |               |               |
|----------|---------------|---------------|---------------|
| a) $Q_3$ | b) $\neg Q_3$ | c) $\neg Q_1$ | d) $\neg Q_2$ |
|----------|---------------|---------------|---------------|

**Solución:**

$$\text{Tenemos} \quad Q_1 \equiv \forall xPx \quad Q_2 \equiv \forall x \forall yRxy$$

$$\text{Veamos si con estas premisas llegamos a la conclusión} \quad Q_3 \equiv \forall x(\neg Px \vee \forall yRyx)$$

Para ello eliminamos los cuantificadores:

$$\begin{array}{l} Q_1 \equiv Px \\ Q_2 \equiv Rxy \\ \hline Q_3 \equiv \neg Px \vee Rxy \end{array}$$

Es decir, de  $Q_1$  y  $Q_2$  obtenemos  $Q_3$  como conclusión

Utilizaremos el método de refutación, es decir, negamos la conclusión ( $\neg Q_3$ ) y vemos si la conjunción  $Q_1 \wedge Q_2 \wedge \neg Q_3$  es un absurdo (contradicción):

$$Q_1 \equiv Px$$

$$Q_2 \equiv Rxy$$

$$\neg Q_3 \equiv \neg(\neg Px \vee Rxy) \equiv Px \wedge \neg Rxy$$

De  $\neg Q_3$  obtenemos las siguientes conclusiones:  $C_1 : Px$

$C_2 : \neg Rxy$

Observamos que se produce un absurdo ya que se verifican  $Rxy$  y  $\neg Rxy$

Por tanto,  $Q_3$  es una conclusión verdadera.

Conclusión: La respuesta correcta es **a)**

### **Ejercicio nº 48.-** (propuesto en septiembre de 1998)

Dada la expresión  $Q \equiv \forall x(\neg Px \vee \forall yRyx)$ , su negación es:

$$a) \exists x(Px \rightarrow \neg \forall yRyx)$$

$$b) \exists x(Px \wedge \exists y \neg Ryx)$$

$$c) \forall x(\neg Px \vee \neg \exists yRyx)$$

$$d) \forall y \forall x \neg Ryx$$

**Solución:**

$$Q \equiv \forall x(\neg Px \vee \forall yRyx)$$

$$\neg Q \equiv \neg \forall x(\neg Px \vee \forall yRyx) \equiv \exists x \neg(\neg Px \vee \forall yRyx) \equiv$$

$$\equiv \exists x(\neg \neg Px \wedge \neg \forall yRyx) \equiv \exists x(Px \wedge \exists y \neg Ryx)$$

Conclusión: La respuesta correcta es **b)**

### **Ejercicio nº 49.-**

El razonamiento:

$$\forall x(Px \rightarrow Qx)$$

$$\frac{\neg Qa}{\neg Pa}$$

donde  $\neg Pa$  es la conclusión, es:

**a)** Imposible

**b)** Depende del universo

**c)** Incorrecto

**d)** Correcto

**Solución:**

Se trata de un silogismo que expresaremos en lenguaje ordinario:

☞ **Premisa 1** : Si  $x$  es  $P$  (tiene la propiedad  $P$ ) entonces  $x$  es  $Q$  (tiene la propiedad  $Q$ )

☞ **Premisa 2** :  $a$  (un elemento del universo del discurso) no es  $Q$

☞ **Conclusión**: Entonces  $a$  no es  $P$

El razonamiento es correcto.

Conclusión: La respuesta es **c)**

Otro razonamiento:

♡ Eliminemos el  $\forall$  en la primera premisa:  $Px \rightarrow Qx$

◇ Eliminemos el condicional en la expresión anterior:  $\neg Px \vee Qx$

☼ Tenemos:

$$\neg Px \vee Qx$$

$$\neg Qa$$

♡ Como la primera premisa está cuantificada, es decir, es  $\forall x$ , podemos expresar:

$$\neg Pa \vee Qa$$

$$\neg Qa$$

✂ Por el método de resolución, resolvemos de ambas que:  $\neg Pa$  (resolvente)

Por tanto: El razonamiento es correcto.

Conclusión: La respuesta correcta es **d)**

**Ejercicio nº 50.-**

Si en la expresión  $\forall x \exists y (Px \rightarrow Qy)$  eliminamos los cuantificadores, queda:

a)  $\neg Px \vee Qy$       b)  $Px \vee Qf(x)$       c)  $\neg Px \vee Qf(x)$       d)  $\neg Px \vee Qa$

**Solución:**

⇒ Tenemos  $\forall x \exists y (Px \rightarrow Qy)$  :

“Para todo  $x$  existe un  $y$  tal que si  $x$  es  $P$ , entonces  $y$  es  $Q$ ”

⇒ Eliminamos el condicional ( $\rightarrow$ ) :  $\forall x \exists y (\neg Px \vee Qy)$

⇒ Para eliminar el cuantificador existencial ( $\exists$ ) debemos considerar que está afectado por el cuantificador universal ( $\forall$ ), es decir, para cada  $x$  existe un  $y$  que depende del “valor” o de “quién sea  $x$ ”. Dicho de otro modo, “ $y$  es función de  $x$ ”

Por todo ello, se elimina  $\exists$  introduciendo una **función de Skolem**:  $\forall x (\neg Px \vee Qf(x))$

⇒ El cuantificador universal puede ahora eliminarse sin más, ya que se entiende que la única variable que hay ( $x$ ) está cuantificada:  $\neg Px \vee Qf(x)$

Por tanto, la expresión primitiva queda:  $\neg Px \vee Qf(x)$

Conclusión: La respuesta correcta es **c)**

**Ejercicio nº 51.-**

Si existe algún  $A$ , si todo  $A$  es  $B$  y todo  $A$  es  $C$ , entonces podemos asegurar que:

- a) Ningún C es B
- b) Algún C es B
- c) Algún C no es B y algún B no es C
- d) Todo B es C

**Solución:**

Expresaremos en el lenguaje lógico matemático. Premisas:

P1 :  $\exists xAx$  que en el lenguaje de conjuntos es  $A \neq \emptyset$

P2 :  $\forall x (Ax \rightarrow Bx)$  que en el lenguaje de conjuntos es  $A \subset B$

P3 :  $\forall x (Ax \rightarrow Cx)$  que en el lenguaje de conjuntos es  $A \subset C$

Debemos decidir como conclusión entre las siguientes alternativas:

- a)  $\forall x (Cx \rightarrow \neg Bx)$  que en lenguaje de conjuntos sería  $C \subset \overline{B}$
- b)  $\exists x (Cx \wedge Bx)$  que en lenguaje de conjuntos sería  $\neg(C \subset \overline{B})$
- c)  $[\exists x (Cx \wedge \neg Bx)] \wedge [\exists x (Bx \wedge \neg Cx)]$  que en lenguaje de conjuntos sería:  
 $C \not\subset B$  y  $B \not\subset C$
- d)  $\forall x (Bx \rightarrow Cx)$  que en lenguaje de conjuntos sería  $B \subset C$

Lo resolveremos gráficamente:

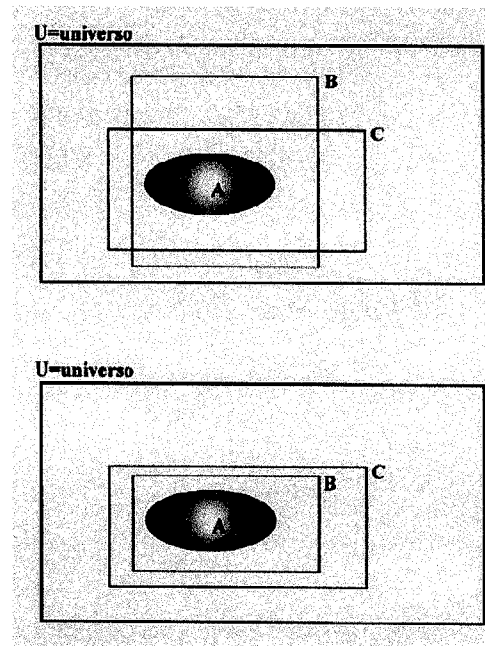
En las dos figuras de la derecha vemos como se cumplen las premisas y como la única supuesta conclusión que se verifica es b) en ambas, es decir, en ambas situaciones la alternativa b) es correcta.

Sin embargo, vemos como la alternativa d) se verifica en la figura inferior y no en la superior, aunque en esta se verifican las premisas.

Cualquier situación que planteemos en las que se verifican P1, P2 y P3, la conclusión b) sería válida.

Por tanto, aseguramos que  $\neg(C \subset \overline{B})$ , es decir, el conjunto C no está dentro del complementario de B.

Conclusión: La respuesta es b)

**Ejercicio nº 52.-**

Consideremos las siguientes premisas de un silogismo:

P<sub>1</sub> : Algún hombre no es andaluz

P<sub>2</sub> : Todo hombre es mortal

La conclusión que obtenemos de ambas premisas es:

- a) Algún andaluz no es mortal
- b) Todo andaluz es mortal
- c) Algún mortal no es andaluz
- d) Algún mortal es andaluz.

**Solución:**

Aunque la solución pueda conseguirse por lógica normal, utilizaremos la lógica matemática y en concreto la teoría de conjuntos.

Llamaremos:

H = propiedad de ser hombre (conjunto de todos los hombres)

A = propiedad de ser andaluz (conjunto de todos los andaluces)

M = propiedad de ser mortal (conjunto de todos los mortales)

Entonces:

$P_1 : \neg(H \subset A)$  se trata de un **“juicio particular negativo”**

$P_2 : H \subset M$  se trata de un **“juicio universal afirmativo”**

H : hace el papel de **“término medio”**

A : hace el papel de **“término predicado”**

M : hace el papel de **“término sujeto”**

Nos encontramos en la **“tercera figura”** de los silogismos aristotélicos, con la “posición” **bOcArdO**, por lo que la conclusión es **MP** (sujeto - predicado) con un **“juicio particular negativo”** (nos lo dice la última O de **bOcArdO**)

Por tanto, la conclusión es: “Algún M (sujeto) no es A (predicado)”  
que “traducido” al lenguaje ordinario es: Algún Mortal no es Andaluz”  
y en el lenguaje de teoría de conjuntos será:  $\neg(M \subset A)$

Conclusión: la respuesta correcta es **c)**

**Ejercicio nº 53.-** (reserva septiembre de 2001)

Dados

$$P_1 : \forall x \exists y (Qx \rightarrow Rxy)$$

$$P_2 : \forall x Qx$$

de  $P_1$  se deduce:

- a)  $\neg P_1$       b)  $P_2 \wedge \neg P_2$       c)  $P_2 \vee \neg P_2$       d) Ninguna de las anteriores

**Solución:**

Analicemos cada una de las alternativas:

- a) Nos preguntan si podemos asegurar que si  $P_1 = \text{Verdadero}$ , entonces  $P_1 \rightarrow \neg P_1$  es Verdadero. Veamos:  
Es evidente que no porque si  $P_1 = V$  entonces  $\neg P_1 = F$  y  $P_1 \rightarrow \neg P_1$  sería F.
- b) Nos preguntan si podemos asegurar que si  $P_1 = \text{Verdadero}$ , entonces  $P_1 \rightarrow P_2 \wedge \neg P_2$  es Verdadero. Veamos:  
El consecuente  $P_2 \wedge \neg P_2$  es Falso y el antecedente  $P_1$  es Verdadero, por lo que el condicional  $P_1 \rightarrow P_2 \wedge \neg P_2$  es Falso.
- c) Nos preguntan si podemos asegurar que si  $P_1 = \text{Verdadero}$ , entonces  $P_1 \rightarrow P_2 \vee \neg P_2$  es Verdadero. Veamos:  
El consecuente  $P_2 \vee \neg P_2$  es Verdadero (ley del tercio excluido) y el antecedente  $P_1$  también es Verdadero, por lo que el condicional  $P_1 \rightarrow P_2 \vee \neg P_2$  es verdadero.

Por tanto: De  $P_1$  se deduce  $P_2 \vee \neg P_2$ . Conclusión: La respuesta es **c)**

**Ejercicio nº 54.-** (reserva septiembre de 2001)

Sea el siguiente modelo o interpretación **M** :

Universo  $U = \{0,1\}$ , las clases  $P = Q = \{1\}$  y la relación  $R = \{(1,1)\}$ .

Sea la proposición  $P : \forall x \exists y (Qx \rightarrow Rxy)$

El modelo **M**, respecto de **P** :

- a) La satisface (la convierte en una proposición verdadera)
- b) Es un contraejemplo para ella (no la satisface)
- c) No se puede averiguar
- d) Ninguna de las anteriores.

**Solución:**

Analicemos la proposición **P**:

“Para todo  $x$  perteneciente al universo  $U$ , existe otro elemento (o el mismo)  $y$ , también de  $U$ , tal que si  $x$  es de  $Q$ , entonces  $x$  está relacionado con  $y$  mediante la relación  $R$ ”

Como  $U$  tiene únicamente dos elementos, podemos comprobar la proposición para cada uno de ellos, con el objetivo de comprobar su cumplimiento:

- ⇒  $0 \in U$  pero no verifica el antecedente del condicional, es decir,  $0 \notin Q$  y por tanto, no tiene por qué verificar el consecuente.
- ⇒  $1 \in U$  y verifica el antecedente del condicional, es decir,  $1 \in Q$  y observamos que existe otro elemento de  $U$  (el mismo 1) que hace que se verifique el consecuente, es decir,  $R11$ , ya que el hecho de que  $(1,1) \in R$  significa que 1 está relacionado con 1 ( $R11$ ).

Por tanto, la proposición es verdadera.

Conclusión: La respuesta es **a)**

**Ejercicio nº 55.-** (reserva septiembre de 2001)

Consideremos el mismo modelo **M** del ejercicio nº 54:

Entonces, el complemento de **R** en  $U \times U$  tiene un número de pares ordenados que es:

- a) 3
- b) 1
- c) 2
- d) 4

**Solución:**

Construyamos el conjunto  $U \times U$ :  $U \times U = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$

Observamos que  $U \times U$  tiene 4 elementos (pares ordenados)

Construyamos el complemento de **R**, el cual estará formado por todos los elementos de  $U \times U$  que no están en **R**:

Complemento de **R** =  $\bar{R} = \{(0,0), (0,1), (1,0)\}$  que observamos tiene 3 pares ordenados:

Conclusión: La respuesta es **a)**

**Ejercicio nº 56.-** (reserva septiembre de 2001)

Consideremos el mismo modelo **M** de los ejercicios 54 y 55:

Si  $R'$  es la recíproca o inversa de  $R$  en  $U \times U$ , entonces el complementario de  $R \cup R'$  en  $U \times U$  tiene un número de elementos que es:

- a) 2                      b) 3                      c) 1                      d) Ninguno anteriores

**Solución:**

Construyamos la recíproca o inversa de  $R$  :

$$R' = \{ (y,x) \in U \times U \mid (x,y) \in R \} = \{ (1,1) \} = R$$

Construyamos  $R \cup R'$ :

$$R \cup R' = \{ (1,1) \} = R = R'$$

Construyamos el complemento de  $R \cup R'$ :

$$\overline{R \cup R'} = \{ (0,0), (0,1), (1,0) \} \subset U \times U, \text{ el cual tiene 3 elementos.}$$

Conclusión: La respuesta correcta es **b)**

**Ejercicio nº 57.-** (reserva septiembre de 2001)

Consideremos el mismo modelo **M** de los ejercicios 54, 55 y 56.

En lógica con identidad, si **i** representa el descriptor, resulta correcto que:

- a)  $0 = ixRxx$                       b)  $1 = ix\forall yRxy$   
 c)  $2 = ix(\neg Rxx)$                       d) Ninguna de las anteriores.

**Solución:**

Analicemos cada alternativa:

- a) Dice que **0** es el único elemento **x** de **U** que está relacionado consigo mismo.  
 Observamos que esta alternativa es falsa, ya que **0** no está relacionado con **0** debido a que  $(0,0) \notin R$ .
- b) Dice que **1** es el único elemento **x** de **U** tal que cualquier otro elemento **y** de **U** verifica que **y** está relacionado con **1**.  
 Observamos que es falsa ya que **0** es un elemento de **U** y podemos comprobar que **1** no está relacionado con **0**, debido a que  $(1,0) \notin R$ .
- c) Dice que **2** es el único elemento de **U** que no está relacionado consigo mismo.  
 Observamos que es falsa ya que **2** ni siquiera pertenece al conjunto **U**.

Por tanto, a), b) y c) son falsas.

Conclusión: La respuesta correcta es **d)**

**Ejercicio nº 58.-** (reserva septiembre de 2001)

¿Cuál de estas afirmaciones respecto de las relaciones es verdadera?

- a) El dominio siempre coincide con el rango.  
 b) El complemento de la relación es la relación recíproca.

- c) Toda relación es igual a su recíproca.
- d) Alguna relación simétrica es antisimétrica.

**Solución:**

Analicemos cada una de las alternativas:

- a) Consideremos el universo  $U = \{0,1\}$  y la relación dada de la forma  $R = \{(0,0), (0,1)\}$ . En este caso el dominio de esta relación es  $D = \{0\} \subset U$  y el rango es  $H = \{0,1\} = U$ . Observamos que el dominio y el rango son distintos, por tanto, **a)** es falsa.
- b) Construyamos el complemento de la relación anterior:

$$\bar{R} = \{(x, y) \mid \neg(xRy)\} = \{(x, y) \mid (x, y) \notin R\} = \{(1,0), (1,1)\}$$

Construyamos la recíproca de la relación R:

$$R' = \{(x, y) \mid yRx\} = \{(x, y) \mid (y, x) \in R\} = \{(0,0), (1,0)\}$$

Observamos que  $\bar{R} \neq R'$ , por lo que **b)** es falsa.

- c) Considerando el modelo construido en el apartado a), vemos que la relación R no coincide con su recíproca R' ya que  $R = \{(0,0), (0,1)\} \neq R' = \{(0,0), (1,0)\}$ . Esto nos permite asegurar que no toda relación es igual a su recíproca.

Por tanto: la alternativa **c)** es falsa.

- d) Consideremos el siguiente modelo:

El universo  $U = \{0,1\}$  y la relación dada de la forma  $R = \{(1,1)\}$ .

Esta relación es simétrica porque si  $xRy$  entonces  $yRx$ . En efecto,  $1R1$  y  $1R1$ .

Esta relación también es antisimétrica porque si  $xRy$  e  $yRx$  entonces  $x=y$ . En efecto, 1 es el único elemento que  $1R1$  y  $1R1$  y  $1=1$ , es decir, R es antisimétrica.

Por tanto, hay relaciones simétricas que son antisimétricas.

Conclusión: La respuesta correcta es **d)**

**Ejercicio nº 59.-**

Consideremos los siguientes enunciados:

$P_1$  : Algunos españoles son malvados

$P_2$  : Algunos malvados son piratas

De  $P_1$  y  $P_2$  deducimos lo siguiente:

- a) Algún español es pirata
- b) Algún malvado no es español ni pirata.
- c) Todo malvado es español o pirata.
- d) Ninguna de las anteriores.

**Solución:**

Consideremos las siguientes clases:

E = Clase o conjunto de los españoles

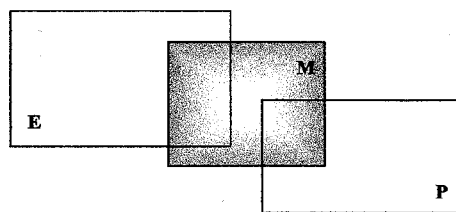
M = Clase o conjunto de los malvados

P = Clase o conjunto de los piratas.

Resolveremos utilizando diagramas de Euler.

Para ello, consideremos la siguiente situación:

→



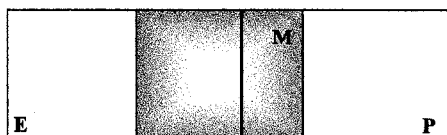
Observamos que en esta situación:

- a) es falso
- b) es verdadero
- c) es falso

Esto nos hace descartar las repuestas a) y c) y considerar la posibilidad de b).

Consideremos ahora la situación siguiente:

→



Observamos que en esta situación:

- a) es falso
- b) es falso
- c) es verdadero

Esto nos obliga a descartar también b)

Conclusión: La respuesta es d)

### Ejercicio nº 60.-

Sea el siguiente modelo o interpretación **M** :

Universo  $U = \{0,1,2\}$  y la relación  $R = \{(1,1), (1,2), (2,2)\}$ .

En lógica con identidad, si **i** representa el descriptor, resulta correcto que:

- a)  $0 = ix (\neg Rxx)$
- b)  $1 = ix \forall y Rxy$
- c)  $2 = ix Rxx$
- d) Ninguna de las anteriores.

#### **Solución:**

Analicemos cada alternativa:

- a) Dice que **0** es el único elemento **x** de **U** que no está relacionado consigo mismo.  
Observamos que esta alternativa es verdadera, ya que **0** no está relacionado con **0** debido a que  $(0,0) \notin R$ .
- b) Dice que **1** es el único elemento **x** de **U** tal que cualquier otro elemento **y** de **U** verifica que **y** está relacionado con **1**.  
Observamos que es falsa ya que **0** es un elemento de **U** y podemos comprobar que **1** no está relacionado con **0**, debido a que  $(1,0) \notin R$ .
- c) Dice que **2** es el único elemento de **U** que está relacionado consigo mismo.  
Observamos que es falsa ya que **2**, aunque está relacionado con **2**, no es el único elemento relacionado consigo mismo, puesto que **1** también está relacionado con **1**.

Conclusión: La repuesta correcta es **a)**

### Ejercicio nº 61.-

Sea el universo  $U = \{0, 1, 2, 3\}$

Sea la relación **R** definida de la forma siguiente:  $xRy \leftrightarrow x + y < 3$

Entonces:

- a)  $(2,1)$  pertenece a la relación recíproca de  $R$
- b) El complemento de  $R$  tiene igual número de elementos que  $R$
- c) La relación recíproca de  $R$  coincide con el complemento de  $R$
- d) Ninguna de las anteriores es cierta.

**Solución:**

$\times$  Construyamos el conjunto  $R \subset U \times U$ , es decir, la relación  $R$ :

$$R = \{ (x,y) \mid xRy \} = \{ (0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (2,0) \}$$

$\times$  Construyamos la relación recíproca o inversa de  $R$ :

$$R' = \{ (y,x) \mid xRy \} = \{ (0,0), (1,0), (2,0), (0,1), (1,1), (0,2) \}$$

Observamos que  $(2,1) \notin R'$ , por lo que a) es falsa.

$\times$  Construyamos el complemento de  $R$ :

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \{ (x,y) \mid \neg(xRy) \} = \{ (x,y) \mid (x,y) \notin R \} = \\ &= \{ (0,3), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,0), (3,1), (3,2), (3,3) \} \end{aligned}$$

Observamos que  $\bar{R}$  Tiene 10 elementos (pares ordenados).

Por tanto, b) es falso.

$\times$  Podemos observar que  $R' \neq \bar{R}$ , por lo que c) también es falsa.

Conclusión: La respuesta correcta es d)

### Ejercicio nº 62.-

Sea el universo  $U = \{ 0, 1, 2, 3 \}$

Sean las relaciones  $R$  y  $S$  definidas de las siguientes formas:

$$R: xRy \leftrightarrow x > y$$

$$S: xSy \leftrightarrow x + y = 3$$

El número de elementos de la composición  $R \circ S$  es:

- a) 0
- b) 4
- c) 5
- d) 6

**Solución:**

Construyamos la relación composición  $R \circ S$ :

$$R \circ S = \{ (x,y) \mid \exists z (xRz \wedge zSy) \} = \{ (x,y) \mid \exists z (x > z \wedge z + y = 3) \}$$

Entonces:

$$(0,0) \notin R \circ S \quad \text{porque } \nexists z \in U \text{ tal que } 0 > z \text{ y } z + 0 = 3$$

$$(0,1) \notin R \circ S \quad \text{porque } \nexists z \in U \text{ tal que } 0 > z \text{ y } z + 1 = 3$$

$$(1,0) \notin R \circ S \quad \text{porque } \nexists z \in U \text{ tal que } 1 > z \text{ y } z + 0 = 3$$

$$(1,1) \notin R \circ S \quad \text{porque } \nexists z \in U \text{ tal que } 1 > z \text{ y } z + 1 = 3$$

$$(1,2) \notin R \circ S \quad \text{porque } \nexists z \in U \text{ tal que } 1 > z \text{ y } z + 2 = 3$$

$$(1,3) \in R \circ S \quad \text{porque } \exists z = 0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } 1 > z \text{ y } z + 3 = 3$$

$$(2,2) \in R \circ S \quad \text{porque } \exists z = 1 \in U \text{ tal que } 2 > z \text{ y } z + 2 = 3$$

$$(2,3) \in R \circ S \quad \text{porque } \exists z = 0 \in U \text{ tal que } 2 > z \text{ y } z + 3 = 3$$

.....  
 $(3,1) \in R \circ S$  porque  $\exists z=2 \in U$  tal que  $3 > 2$  y  $z+1=3$   
 $(3,2) \in R \circ S$  porque  $\exists z=1 \in U$  tal que  $3 > 1$  y  $z+2=3$   
 $(3,3) \in R \circ S$  porque  $\exists z=0 \in U$  tal que  $3 > 0$  y  $z+3=3$   
 .....

De este modo obtenemos:

$R \circ S = \{ (1,3), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3) \}$  que tiene 6 elementos.

Conclusión: la respuesta correcta es **d)**

### **Ejercicio nº 63.-**

Sea el universo formado por las siguientes figuras geométricas:

$U = \{ \blacktriangle, \blacktriangledown, \square, \diamond, \blacklozenge, \triangleup \}$

Definamos la siguiente relación R para los elementos de U:

$xRy \leftrightarrow \text{nº de lados de } x < \text{nº de lados de } y$

Entonces:

- a) El dominio y el rango de la relación R coinciden (el la misma clase)
- b) El dominio y el rango de la relación R no coinciden, pero tienen el mismo número de elementos.
- c) El dominio de la relación R tiene un elemento más que el rango.
- d) Ninguno de los apartados anteriores es cierto.

**Solución:**

Primero comprendamos la relación:

$\neg(\blacktriangle R \blacktriangledown)$  porque nº de lados de  $\blacktriangle \nless \text{nº de lados de } \blacktriangledown$

$\diamond R \triangleup$  porque nº de lados de  $\diamond < \text{nº de lados de } \triangleup$

Construyamos la clase  $R \subset U \times U$ :

$R = \{ (\blacktriangle, \square), (\blacktriangle, \diamond), (\blacktriangle, \blacklozenge), (\blacktriangle, \triangleup), (\blacktriangledown, \square), (\blacktriangledown, \diamond), (\blacktriangledown, \blacklozenge), (\blacktriangledown, \triangleup), (\square, \triangleup), (\diamond, \triangleup), (\blacklozenge, \triangleup) \}$

Construyamos el dominio y el rango de la relación R:

Dominio de  $R = D = \{ x \in U \mid \exists y (xRy) \} = \{ \blacktriangle, \blacktriangledown, \square, \diamond, \blacklozenge \} \subset U$

Rango de  $R = H = \{ y \in U \mid \exists x (xRy) \} = \{ \square, \diamond, \blacklozenge, \triangleup \} \subset U$

Observamos que:

- $\Leftrightarrow D \neq H$ , por lo que a) es falsa.
- $\Leftrightarrow \text{nº de elementos de } D = 5 \neq 4 = \text{nº de elementos de } H$ . b) es falsa
- $\Leftrightarrow$  El dominio tiene un elemento más que el rango.

Conclusión: La respuesta es **c)**

### **Ejercicio nº 64.-**

Sea el universo formado por las siguientes figuras geométricas:

$U = \{ \blacktriangle, \blacktriangledown, \square, \diamond, \blacklozenge, \triangleup \}$

Definamos la siguiente relación R para los elementos de U:

$xRy \leftrightarrow \text{nº de lados de } x < \text{nº de lados de } y$

Consideremos la clase  $A = \{ \blacktriangledown, \blacklozenge \}$  del universo U.

Entonces, la composición de la relación R con la clase A ( $R \circ A$ ) es:

- a) La clase  $\{\blacktriangledown, \blacklozenge\}$
- b) La clase  $\{\blacktriangle, \blacktriangledown\}$
- c) La relación  $\{(\blacktriangledown, \square), (\blacktriangledown, \diamond), (\blacktriangledown, \blacklozenge), (\blacktriangledown, \triangle), (\blacklozenge, \triangle)\}$
- d) Ninguna de las anteriores.

**Solución:**

Construyamos la relación R:

$$R = \{(\blacktriangle, \square), (\blacktriangle, \diamond), (\blacktriangle, \blacklozenge), (\blacktriangle, \triangle), (\blacktriangledown, \square), (\blacktriangledown, \diamond), (\blacktriangledown, \blacklozenge), (\blacktriangledown, \triangle), (\square, \triangle), (\diamond, \triangle), (\blacklozenge, \triangle)\}$$

Construyamos la composición de la relación R con la clase A (Nota: D = Dominio de R y H = rango de R):

$$R \circ A = \{x \in U \mid x \in D \wedge \exists y (xRy \wedge y \in H \wedge y \in A)\} = \{\blacktriangle, \blacktriangledown\} \subset D \subset U$$

Siendo:

$$\text{Dominio de R} = D = \{x \in U \mid \exists y (xRy)\} = \{\blacktriangle, \blacktriangledown, \square, \diamond, \blacklozenge\} \subset U$$

$$\text{Rango de R} = H = \{y \in U \mid \exists x (xRy)\} = \{\square, \diamond, \blacklozenge, \triangle\} \subset U$$

Conclusión: La respuesta correcta es b)

### Ejercicio nº 65.-

Sea el universo formado por las siguientes figuras geométricas:

$$U = \{\blacktriangle, \blacktriangledown, \square, \diamond, \blacklozenge, \triangle\}$$

Definamos la siguiente relación R para los elementos de U:

$$xRy \leftrightarrow \text{nº de lados de } x < \text{nº de lados de } y$$

Consideremos la clase  $A = \{\blacktriangledown, \blacklozenge\}$  del universo U.

Entonces, la composición de la clase A con la relación ( $A \circ R$ ) es:

- a) La clase  $\{\blacktriangledown, \blacklozenge\}$
- b) La clase  $\{\square, \diamond, \blacklozenge, \triangle\}$
- c) La relación  $\{(\blacktriangle, \blacklozenge), (\blacktriangledown, \blacklozenge), (\blacklozenge, \triangle)\}$
- d) Ninguna de las anteriores.

**Solución:**

Construyamos la relación R:

$$R = \{(\blacktriangle, \square), (\blacktriangle, \diamond), (\blacktriangle, \blacklozenge), (\blacktriangle, \triangle), (\blacktriangledown, \square), (\blacktriangledown, \diamond), (\blacktriangledown, \blacklozenge), (\blacktriangledown, \triangle), (\square, \triangle), (\diamond, \triangle), (\blacklozenge, \triangle)\}$$

Construyamos la composición de la clase A con la relación R : (Nota: D = Dominio de R y H = rango de R):

$$A \circ R = \{y \in U \mid y \in H \wedge \exists x (xRy \wedge x \in D \wedge x \in A)\} = \{\square, \diamond, \blacklozenge, \triangle\} \subset H \subset U$$

Siendo:

$$\text{Dominio de R} = D = \{x \in U \mid \exists y (xRy)\} = \{\blacktriangle, \blacktriangledown, \square, \diamond, \blacklozenge\} \subset U$$

$$\text{Rango de R} = H = \{y \in U \mid \exists x (xRy)\} = \{\square, \diamond, \blacklozenge, \triangle\} \subset U$$

Conclusión: La respuesta correcta es b)

**Ejercicio nº 66.-** (reserva septiembre 2001)

Sea  $P1 : p \rightarrow (q \wedge r)$  una proposición de la lógica trivalente de Lukasiewicz.

Entonces, su valor de verdad para  $p = q = r = \frac{1}{2}$  sería:

- a) 0                      b)  $\frac{1}{2}$                       c) 2                      d) 1

**Solución:**

✦ Por la lógica trivalente que propone Lukasiewicz:

✦ Para los valores  $q = r = \frac{1}{2}$ , el valor de  $q \wedge r$  es  $q \wedge r = \min(q, r) = \min(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

✦ Para los valores de verdad  $p = \frac{1}{2}$  y  $q \wedge r = \frac{1}{2}$  tenemos el valor para  $p \rightarrow (q \wedge r)$ :

$$p \rightarrow (q \wedge r) = \min(1, 1 + (q \wedge r) - p) = \min(1, 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}) = \min(1, 1) = 1$$

Es decir, el valor de verdad de  $p \rightarrow (q \wedge r)$  para la interpretación  $p = q = r = \frac{1}{2}$  es 1.

Conclusión: La respuesta es d)

**Ejercicio nº 67.-** (propuesto en septiembre 2001)

Sea  $P1 : p \leftrightarrow (q \wedge r)$  una proposición de la lógica trivalente de Lukasiewicz.

Entonces, su valor de verdad para  $p = q = r = \frac{1}{2}$  sería:

- a) 0                      b) 1                      c)  $\frac{1}{2}$                       d) 2

**Solución:**

✦ Por la lógica trivalente que propone Lukasiewicz:

✦ Para los valores  $q = r = \frac{1}{2}$ , el valor de  $q \wedge r$  es  $q \wedge r = \min(q, r) = \min(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

✦ Para los valores de verdad  $p = \frac{1}{2}$  y  $q \wedge r = \frac{1}{2}$  tenemos el valor para  $p \leftrightarrow (q \wedge r)$ :

$$p \leftrightarrow (q \wedge r) = 1 - |p - q \wedge r| = 1 - |\frac{1}{2} - \frac{1}{2}| = 1 - |0| = 1 - 0 = 1$$

Es decir, el valor de verdad de  $p \leftrightarrow (q \wedge r)$  para la interpretación  $p = q = r = \frac{1}{2}$  es 1.

Conclusión: La respuesta es b)

**Ejercicio nº 68.-** (propuesto en junio 2001, 1ª semana)

Sea  $P1 : p \rightarrow (q \vee r)$  una proposición de la lógica trivalente de Lukasiewicz.

Entonces, su valor de verdad para  $p = q = r = \frac{1}{2}$  sería:

- a) 2                      b) 1                      c) 0                      d)  $\frac{1}{2}$

**Solución:**

✦ Por la lógica trivalente que propone Lukasiewicz:

✦ Para los valores  $q = r = \frac{1}{2}$ , el valor de  $q \vee r$  es  $q \vee r = \max(q, r) = \max(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

✦ Para los valores de verdad  $p = \frac{1}{2}$  y  $q \vee r = \frac{1}{2}$  tenemos el valor para  $p \rightarrow (q \vee r)$ :

$$p \rightarrow (q \vee r) = \min(1, 1 + (q \vee r) - p) = \min(1, 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}) = \min(1, 1) = 1$$

Es decir, el valor de verdad de  $p \rightarrow (q \vee r)$  para la interpretación  $p = q = r = \frac{1}{2}$  es 1.

Conclusión: La respuesta es b)

**Ejercicio nº 69.-** (reserva septiembre 2001)

Si  $A = \{0|0, 1|0'5\}$  es un conjunto borroso, podemos obtener por interpolación lineal  $\mu_A(0'5)$  y su valor es igual a:

- a) 0'25                      b) 0'75                      c) 0'20                      d) 1

**Solución:**

Es un problema de proporciones:

A una diferencia de  $1 - 0 = 1$  le corresponde una diferencia  $\mu_A(1) - \mu_A(0) = 0'5$

A una diferencia de  $0'5 - 0 = 0'5$  le corresponderá una diferencia  $\mu_A(0'5) - \mu_A(0) = d$

Entonces:  $d \cdot 1 = 0'5 \cdot 0'5$ , es decir,  $d = 0'25$ , de donde  $\mu_A(0'5) = \mu_A(0) + d = 0 + 0'25 = 0'25$

Por tanto:  $\mu_A(0'5) = 0'25$

Conclusión: La respuesta correcta es **a)**

**Ejercicio nº 70.-** (propuesto en septiembre 2001)

Si  $A = \{0|0'75, 1|0'5, 2|1, 3|0'4\}$  es un conjunto borroso, podemos obtener por interpolación lineal  $\mu_A(1'5)$  y su valor es igual a:

- a)  $\mu_A(3)$                       b)  $\mu_A(2)$                       c)  $\mu_A(1)$                       d)  $\mu_A(0)$

**Solución:**

Es un problema de proporciones:  $\mu_A(1) = 0'5$  y  $\mu_A(2) = 1$

A una diferencia de  $2 - 1 = 1$  le corresponde una diferencia  $\mu_A(2) - \mu_A(1) = 0'5$

A una diferencia de  $1'5 - 1 = 0'5$  le corresponderá una diferencia  $\mu_A(1'5) - \mu_A(1) = d$

Entonces:

$d \cdot 1 = 0'5 \cdot 0'5 = 0'25$ , es decir,  $d = 0'25$ , de donde  $\mu_A(1'5) = \mu_A(1) + d = 0'5 + 0'25 = 0'75$

Por tanto:  $\mu_A(1'5) = 0'75 = \mu_A(0)$

Conclusión: La respuesta correcta es **d)**

**Ejercicio nº 71.-** (propuesto en junio 2001)

¿Para qué conjuntos borrosos A y B se cumple que si  $A \subset B$  entonces  $A \cap c(B) = \Phi$ ?  
 $c(B)$  denota el complementario de B y  $\Phi$  el vacío borroso.

- a) Sólo para  $A = \Phi$  y  $B \neq \Phi$                       b) Para ningún A y B  
 c) Para algunos  $A \neq \Phi$  y  $B \neq \Phi$                       d) Para cualesquiera A y B

**Solución:**

Queremos ver como deben o pueden ser los conjuntos borrosos A y B tales que:

$$A \subset B \rightarrow A \cap c(B) = \Phi$$

Veamos:

⇒ Supongamos un universo  $U$  y dos conjuntos borrosos  $A$  y  $B$ .

$A \subset B$  significa que  $\forall x \in U$  es  $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$

✗  $c(B) = \{ x | \mu_{c(B)}(x) = 1 - \mu_B(x), \forall x \in U \}$

✗  $A \cap c(B) = \{ x | \mu_{A \cap c(B)}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_{c(B)}(x)), \forall x \in U \}$

✗ Como  $A \cap c(B) = \Phi$ , entonces debe ser  $\min(\mu_A(x), \mu_{c(B)}(x)) = 0 \quad \forall x \in U$

✗ Si  $\min(\mu_A(x), \mu_{c(B)}(x)) = 0 \quad \forall x \in U$ , entonces, para cada  $x$  de  $U$ :

☞ O bien  $\mu_A(x) = 0$  o bien  $\mu_{c(B)}(x) = 0$ , es decir:

O bien  $\mu_A(x) = 0$  o bien  $\mu_B(x) = 1$

☞ Es decir, puede ser  $\mu_A(x) = 0$  y  $\mu_B(x) \leq 1$  o puede ser  $\mu_A(x) \neq 0$  y  $\mu_B(x) = 1$ , por lo que las condiciones que debemos exigir son,  $\forall x \in U$ :

• Si  $\mu_A(x) = 0$ , entonces  $\mu_B(x) \leq 1$

Si  $\mu_A(x) \neq 0$ , entonces  $\mu_B(x) = 1$

Es decir, existen  $A \neq \Phi$  y  $B \neq \Phi$  tales que si  $A \subset B$  entonces  $A \cap c(B) = \Phi$ .

Las condiciones son que ( $\forall x \in U$  es  $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ ) y que (Si  $\mu_A(x) = 0$ , entonces  $\mu_B(x) \leq 1$ , y Si  $\mu_A(x) \neq 0$ , entonces  $\mu_B(x) = 1$ )

Vamos a comprobarlo con un ejemplo:

■  $U = \{a, e, i, o, u\}$  es el universo

■  $A = \{a|0'6, i|0'5, o|1\} \neq \Phi$  y  $B = \{a|1, i|1, o|1, u|0'6\} \neq \Phi$

■ Es evidente que  $A \subset B$ , es decir,  $\forall x \in U$  es  $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$

■  $c(B) = \{e|1, u|0'4\}$

■  $A \cap c(B) = \Phi$

Hemos construido un caso en que  $A \neq \Phi$  y  $B \neq \Phi$ ,  $A \subset B$  y  $A \cap c(B) = \Phi$ .

Conclusión: La respuesta correcta es **c)**

**NOTA:** El desarrollo de este ejercicio nos permite enunciar lo siguiente:

Dado el universo  $U$  y dos conjuntos borrosos  $A$  y  $B$  tales que:

①  $\forall x \in U$  es  $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$  (esta condición puede eliminarse)

② Si  $\mu_A(x) = 0$ , entonces  $\mu_B(x) \leq 1$

③ Si  $\mu_A(x) \neq 0$ , entonces  $\mu_B(x) = 1$

Entonces se verifica que  $A \cap c(B) = \Phi$

## Ejercicio nº 72.-

Sea el conjunto borroso  $B = \{0|0'3, 1|0'6\}$ . La altura y el cardinal borroso son respectivamente:

a)  $0'6$  y  $0'9$

b)  $0'9$  y  $0'6$

c)  $0'3$  y  $0'6$

d)  $0'9$  y  $0'9$

**Solución:**

Veamos la altura de  $B$ : Altura de  $B = \max\{\mu_B(x)\} = \max\{0'3, 0'6\} = 0'6$

Veamos el cardinal de  $B$ :  $card(B) = \sum_{x \in U} \mu_B(x) = 0'3 + 0'6 = 0'9$

Conclusión la respuesta correcta es **a)**

**Ejercicio nº 73.-**

Sean tres universos  $U = \{a, e, i\}$ ,  $V = \{\alpha, \beta\}$  y  $W = \{b, c, d\}$ . Sea  $A$  una relación binaria entre elementos de  $U$  y de  $V$ , que especificaremos como  $A(U, V)$  y sea  $B$  otra relación binaria entre elementos de  $V$  y  $W$  que expresaremos como  $B(V, W)$  y que determinamos de las siguientes formas:

$$A(U, V) = \{ (a, \alpha) | 0'1, (a, \beta) | 0'4, (e, \alpha) | 0'6, (e, \beta) | 1, (i, \alpha) | 0'8, (i, \beta) | 0'5 \}$$

$$B(V, W) = \{ (\alpha, b) | 1, (\alpha, c) | 0'6, (\alpha, d) | 0'3, (\beta, b) | 0, (\beta, c) | 0'4, (\beta, d) | 0'5 \}$$

Consideremos la relación composición  $C = A \circ B$  que se establece entre los universos  $U$  y  $W$  y que especificamos como  $C(U, W)$ . Entonces:

El grado de pertenencia del par  $(e, d) \in U \times W$  a la relación  $C(U, W)$  es:

a) 1

b) 0'3

c) 0'6

d) 0'5

**Solución:**

La composición de relaciones es otra relación que definiremos para el caso que nos ocupa:

$$C(U, W) = A(U, V) \circ B(V, W) = \{ (x, z) | \mu_{A \circ B}(x, z), \forall x \in U, \forall y \in V, \forall z \in W \}$$

$$\text{siendo } \mu_{A \circ B}(x, z) = \max_{y \in V} \left[ \min(\mu_A(x, y), \mu_B(y, z)) \right]$$

Nos interesa conocer el grado de pertenencia del par  $(e, d)$  a  $C(U, W)$ . Veamos:

$$(e, d) \in A \circ B \mapsto \left\{ \begin{array}{l} (e, \alpha), (\alpha, d) \mapsto 0'6, 0'3 \mapsto \min = 0'3 \\ (e, \beta), (\beta, d) \mapsto 1, 0'5 \mapsto \min = 0'5 \end{array} \right\} \mapsto \max = 0'5$$

Es decir,  $C(U, W) = \{ \dots, (e, d) | 0'5, \dots \}$

Conclusión: La respuesta correcta es **d)**

**Ejercicio nº 74.-**

Consideremos el mismo enunciado del ejercicio anterior. Ahora el grado de pertenencia del par  $(a, c)$  a la relación  $C = A \circ B$  es:

a) 0'6

b) 0'4

c) 0'1

d) Ninguno anteriores

**Solución:**

Siguiendo el modelo del ejercicio anterior, resolvemos:

$$(a, c) \in A \circ B \mapsto \left\{ \begin{array}{l} (a, \alpha), (\alpha, c) \mapsto 0'1, 0'6 \mapsto \min = 0'1 \\ (a, \beta), (\beta, c) \mapsto 0'4, 0'4 \mapsto \min = 0'4 \end{array} \right\} \mapsto \max = 0'4$$

Es decir,  $C(U, W) = \{ \dots, (a, c) | 0'4, \dots \}$

Conclusión: La respuesta correcta es **b)**

**Ejercicio nº 75.-**

Consideremos el mismo enunciado de los ejercicios 72 y 73.

La tabla de doble entrada que determina la relación  $C(U,W) = A(U,V) \circ B(V,W)$  es:

a)

		W		
		b	c	d
U	a	0	0'1	0'1
	e	0	0'4	0'3
	i	0	0'4	0'3

b)

		W		
		b	c	d
U	a	0'1	0'4	0'4
	e	0'6	0'6	0'5
	i	0'8	0'6	0'5

c)

		W		
		b	c	d
U	a	1	0'6	0'5
	e	1	1	1
	i	1	0'8	0'8

d)

		W		
		b	c	d
U	a	0'5	0'4	0'4
	e	0'6	0'6	0'5
	i	0'8	0'6	0'3

**Solución:**

Comencemos por expresar las relaciones  $A(U,V)$  y  $B(V,W)$  como tablas de doble entrada:

Relación  $A(U,V)$ 

		V	
		$\alpha$	$\beta$
U	a	0'1	0'4
	e	0'6	1
	i	0'8	0'5

Relación  $B(V,W)$ 

		W		
		b	c	d
V	$\alpha$	1	0'6	0'3
	$\beta$	0	0'4	0'5

Matricialmente construimos la relación  $C(U,W) = A(U,V) \circ B(V,W)$  como un “producto de matrices”, con las siguientes observaciones:

- ☞ El producto de números  $\mu_A(x,y) \cdot \mu_B(y,z)$  significa “elegir el mínimo de esos dos factores”.
- ☞ Las sumas de esos mínimos (un mínimo + otro mínimo) significa “elegir el máximo de esos dos sumandos”.

Veamos:

$$\begin{aligned}
 C(U,W) &= A(U,V) \circ B(V,W) = \begin{pmatrix} 0'1 & 0'4 \\ 0'6 & 1 \\ 0'8 & 0'5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0'6 & 0'3 \\ 0 & 0'4 & 0'5 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 0'1 \cdot 1 + 0'4 \cdot 0 & 0'1 \cdot 0'6 + 0'4 \cdot 0'4 & 0'1 \cdot 0'3 + 0'4 \cdot 0'5 \\ 0'6 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0'6 \cdot 0'6 + 1 \cdot 0'4 & 0'6 \cdot 0'3 + 1 \cdot 0'5 \\ 0'8 \cdot 1 + 0'5 \cdot 0 & 0'8 \cdot 0'6 + 0'5 \cdot 0'4 & 0'8 \cdot 0'3 + 0'5 \cdot 0'5 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \max(0'1,0) & \max(0'1,0'4) & \max(0'1,0'4) \\ \max(0'6,0) & \max(0'6,0'4) & \max(0'3,0'5) \\ \max(0'8,0) & \max(0'6,0'4) & \max(0'3,0'5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0'1 & 0'4 & 0'4 \\ 0'6 & 0'6 & 0'5 \\ 0'8 & 0'6 & 0'5 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

A la vista de la matriz obtenida, podemos expresar la relación  $C(U,W)$  en forma de tabla de doble entrada:

		W		
		b	c	d
U	a	0'1	0'4	0'4
	e	0'6	0'6	0'5
	i	0'8	0'6	0'5

Conclusión: La respuesta correcta es **b)**

### Ejercicio nº 76.-

Sea el universo  $\mathbb{R}$  (conjunto de los número reales).

Sea el conjunto borroso  $A$  = Números reales muy próximos a 4.

El grado de pertenencia de cualquier  $x \in \mathbb{R}$  al conjunto  $A$  viene determinado por la función:

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1 + (x - 4)^2}$$

Sea la sentencia  $A$ : "El número real 5'5 está muy próximo a 4"

Entonces, el valor de verdad de esta sentencia para una interpretación verdadera de ella es:

- a) Verdadero                      b) Falso                      c) 4/13                      d) Indeterminado

**Solución:**

$A(x)$ : " $x$  es un número muy próximo a 4" es un predicado asociado al conjunto borroso  $A$ .

$A(5'5)$ : " $5'5$  es un número muy próximo a 4" es una sentencia cuyo valor de verdad correspondiente a una interpretación verdadera es el grado de pertenencia de 5'5 al conjunto borroso  $A$ .

Como  $\mu_A(5'5) = \mu_A(5'5) = \frac{1}{1 + (5'5 - 4)^2} = \frac{4}{13}$  obtenemos:

Conclusión : La respuesta correcta es **c)**

**Ejercicio nº 77.-**

Sean los universos  $U = \{a, e, i, o, u\}$  y  $V = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ .

Sean los conjuntos borrosos:

$A = \{a|1, i|0'5, u|0'2\} \subset U$ ,  $B = \{\alpha|1, \gamma|0'1\} \subset V$  y  $C = \{\alpha|0'5, \beta|0'4\} \subset V$

Llamemos  $A(x)$ ,  $B(y)$  y  $C(z)$ ,  $\forall x \in U$ ,  $\forall y \in V$  y  $\forall z \in V$  a los predicados asociados a esos conjuntos.

La sentencia "Si  $e$  es  $A$  entonces  $\gamma$  es  $B$ , si no,  $\beta$  es  $C$ " tiene un valor de verdad de:

- a) 1                      b) 0'1                      c) 0'4                      d) 0

**Solución:**

Se trata de una sentencia condicional ampliada cuya estructura expresamos:

$$[A(x) \rightarrow B(y)] \wedge [\neg A(x) \rightarrow C(z)]$$

En nuestro caso concreto es:  $[A(e) \rightarrow B(\gamma)] \wedge [\neg A(e) \rightarrow C(\beta)]$

Buscamos el valor de verdad para una interpretación verdadera de esta sentencia, es decir:

$$I[(A(e) \rightarrow B(\gamma)) \wedge (\neg A(e) \rightarrow C(\beta))] = \max(I(A(e) \rightarrow B(\gamma)), I(\neg A(e) \rightarrow C(\beta))) = \\ = \max(\min(\mu_A(e), \mu_B(\gamma)), \min(1 - \mu_A(e), \mu_C(\beta))) = \max(\min(0, 0'1), \min(1, 0'4)) = \max(0, 0'4) = 0'4$$

El valor de verdad pedido es 0'4.

Conclusión: La respuesta correcta es c)

**Ejercicio nº 78.-**

Para el universo  $U = \{1, 2\}$  y la función de Skolem  $f(1) = 1$  y  $f(2) = 2$ , sean  $P(1,2)$  y  $P(2,1)$  falsos y  $P(1,1)$  y  $P(2,2)$  verdaderos. ¿Cuál de estas expresiones es verdadera?

- a)  $\forall x \exists y P(x, y)$                       b)  $\exists x \forall y P(x, y)$   
c)  $\forall x \forall y P(x, y)$                       d)  $\neg \forall x \exists y \neg P(x, y)$

**Solución:**

Analicemos la alternativa a):

✗ Eliminamos el cuantificador existencial. Como está afectado por un cuantificado universal, introducimos la función de Skolem:

$$\forall x P(x, f(x))$$

✗ Eliminamos el cuantificador universal:

$$P(x, f(x))$$

El significado de esta última expresión es que  $P(1, f(1))$  es verdadero y  $P(2, f(2))$  también es verdadero, es decir,  $P(1,1)$  y  $P(2,2)$  son verdaderos.

Es decir,  $P(1,1)$  y  $P(2,2)$  son verdaderos, tal como dice el enunciado.

Conclusión: La respuesta correcta es a)

Hagamos otro razonamiento:

Si “leemos” la alternativa a), dice: “Para todo  $x$  de  $U$ , existe otro  $y$  (que puede ser el mismo  $x$ ) de  $U$  tal que  $P(x,y)$  es verdadero”.

Pues en efecto:

- ◆ Para  $x=1$  existe  $y=1$  tal que  $P(1,1)$  es verdadero.
- ◆ Para  $x=2$  existe  $y=2$  tal que  $P(2,2)$  es verdadero.

Por tanto, **a)** es verdadera.

### Ejercicio nº 79.- (Reserva septiembre 2001)

Sean  $P_1: p \rightarrow (q \wedge r)$  y  $P_2: r \leftrightarrow p$ . Entonces  $P_1 \wedge \neg P_2$  es:

- |                    |                              |
|--------------------|------------------------------|
| a) Tautología      | b) Contradicción             |
| c) Indeterminación | d) Ninguna de las anteriores |

**Solución:**

Expresemos ambas proposiciones en forma clausulada:

$$P_1: p \rightarrow (q \wedge r) \equiv \neg p \vee (q \wedge r) \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$$

$$P_2: r \leftrightarrow p \equiv (r \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow r) \equiv (\neg r \vee p) \wedge (\neg p \vee r)$$

Negemos  $P_2$ :

$$\neg P_2: \neg [(\neg r \vee p) \wedge (\neg p \vee r)] \equiv \neg(\neg r \vee p) \vee \neg(\neg p \vee r)$$

Apliquemos una de las leyes de Morgan:

$$\neg P_2: (r \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg r)$$

Apliquemos las leyes distributivas:

$$\neg P_2: (r \vee p) \wedge (r \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg r)$$

Como  $r \vee \neg r$  y  $\neg p \vee p$  son tautologías, se pueden eliminar:

$$\neg P_2: (r \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg r)$$

Construyamos  $P_1 \wedge \neg P_2$  (que estará en forma clausulada):

$$P_1 \wedge \neg P_2: (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (r \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg r)$$

● Consideremos la interpretación:  $p = V$ ;  $q = V$  y  $r = V$

Entonces vemos que:  $P_1 \wedge \neg P_2$  es  $(V) \wedge (V) \wedge (V) \wedge (F)$  que es **FALSO**

● Consideremos la interpretación:  $p = F$ ;  $q = V$  y  $r = V$

Entonces vemos que:  $P_1 \wedge \neg P_2$  es  $(V) \wedge (V) \wedge (V) \wedge (V)$  que es **VERDADERO**

Es decir, de las ocho interpretaciones posible que hay ( $2^3 = 8$ ), al menos una es Verdadera y al menos una es Falsa, por lo que podemos decidir que  $P_1 \wedge \neg P_2$  es indeterminación (no es tautología ni contradicción)..

Conclusión: La respuesta correcta es **c)**

### Ejercicio nº 80.- (Reserva septiembre 2001)

Sean  $P_1: p \rightarrow (q \wedge r)$  y  $P_2: r \leftrightarrow p$ . Entonces: “ $P_1$  es suficiente pero no

necesario para  $P_2$ " es:

- a) Verdadero                      b) Falso  
c) Indeterminable                d) Ninguna de las anteriores.

**Solución:**

☞ " $P_1$  es suficiente para  $P_2$ " significa que  $P_1 \rightarrow P_2$  es tautología.

☞ " $P_1$  es necesario para  $P_2$ " significa que  $\neg P_1 \rightarrow \neg P_2$  es tautología.

Para que la opción a) sea la correcta debe ser que  $P_1 \rightarrow P_2$  sea tautología y que  $\neg P_1 \rightarrow \neg P_2$  no lo sea. Si no ocurren ambas cosas, el enunciado sería falso y la respuesta correcta sería b).

Veamos:

✓ Consideremos la siguiente interpretación:  $p = F$ ;  $q = V$  y  $r = V$ .

Entonces:

$$\left. \begin{array}{l} p = F \\ q \wedge r = V \end{array} \right\} \text{ entonces } p \rightarrow (q \wedge r) = P_1 = V$$

Mientras que:

$$\left. \begin{array}{l} p = F \\ r = V \end{array} \right\} \text{ entonces } r \leftrightarrow p = P_2 = F$$

Entonces, para la interpretación  $p = F$ ;  $q = V$  y  $r = V$  tenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} P_1 = V \\ P_2 = F \end{array} \right\} \text{ entonces } P_1 \rightarrow P_2 \text{ es Falso}$$

Es decir, existe una interpretación (de las  $8=2^3$  posibles), para las que el condicional  $P_1 \rightarrow P_2$  es falso, es decir, no es tautología. Esto significa que  $P_1$  no es condición suficiente para  $P_2$ , esto es, el enunciado es falso.

Conclusión: La respuesta correcta es **b)**

### Ejercicio nº 81.-

Supongamos que **P** y **Q** son dos sentencias que dependen de una o más variables proposicionales y que  $P \rightarrow Q$  es una tautología. Entonces  $\neg Q \rightarrow \neg P$  es:

- a) Tautología                      b) Contradicción  
c) Indeterminada                d)  $P \rightarrow Q$  no puede ser tautología.

**Solución:**

**P** y **Q** son sentencias que dependen de las proposiciones  $p, q, r, s, \dots$  etc.

La sentencia  $P \rightarrow Q$  puede ser tautología, es decir, puede ser verdadera para todas las interpretaciones posibles de las variables  $p, q, r, s, \dots$  etc.

Supongamos que  $P \rightarrow Q$  es tautología. Esto supone que de las cuatro posibilidades que existen para los valores de verdad del antecedente **P** y del consecuente **Q**, es decir:

- ①  $P = V$  y  $Q = V$     ②  $P = V$  y  $Q = F$     ③  $P = F$  y  $Q = V$     ④  $P = F$  y  $Q = F$

la única que no puede ocurrir es ② porque en ese caso  $P \rightarrow Q$  sería F y, por tanto no sería tautología, mientras que para los otros tres casos  $P \rightarrow Q$  es Verdadero.

Supongamos que ocurre ①: En este caso  $\neg Q = F$ ;  $\neg P = F$   
y por tanto  $\neg Q \rightarrow \neg P$  es Verdadera.

Supongamos que ocurre ③: En este caso  $\neg Q = F$ ;  $\neg P = V$   
y por tanto  $\neg Q \rightarrow \neg P$  es Verdadera.

Supongamos que ocurre ④: En este caso  $\neg Q = V$ ;  $\neg P = V$   
y por tanto  $\neg Q \rightarrow \neg P$  es Verdadera.

Es decir,  $\neg Q \rightarrow \neg P$  es Verdadera en todas las situaciones posibles, esto es, se trata de una tautología.

Conclusión: La respuesta correcta es a)

### **Ejercicio nº 82.-**

Supongamos que  $P$  y  $Q$  son dos sentencias que dependen de una o más variables proposicionales y que  $P \rightarrow Q$  es una tautología. Entonces  $\neg P \rightarrow \neg Q$  es:

- |                  |   |
|------------------|---|
| a) Tautología    | b) Contradicción                              |
| c) Indeterminada | d) $P \rightarrow Q$ no puede ser tautología. |

#### **Solución:**

El planteamiento es similar al del ejercicio anterior, así que nos vamos directamente a analizar cada una de las tres situaciones posibles:

Supongamos que ocurre ①: En este caso  $\neg P = F$ ;  $\neg Q = F$   
y por tanto  $\neg P \rightarrow \neg Q$  es Verdadera.

Supongamos que ocurre ③: En este caso  $\neg P = V$ ;  $\neg Q = F$   
y por tanto  $\neg P \rightarrow \neg Q$  es Falsa.

Es decir, hay una situación para la que  $P \rightarrow Q$  es verdadera y  $\neg P \rightarrow \neg Q$  es falsa, lo cual supone que  $\neg P \rightarrow \neg Q$  no es tautología. Tampoco es contradicción ya que para la situación ① la sentencia  $\neg P \rightarrow \neg Q$  es verdadera.

Se trata pues de una indeterminación.

Conclusión: La respuesta correcta es c)

### **Ejercicio nº 83.-** (Reserva septiembre 2001)

Sean  $P_1: p \rightarrow (q \wedge r)$  y  $P_2: r \leftrightarrow p$ . Entonces  $P_1 \oplus P_2$  es:

- |                    |                        |
|--------------------|------------------------|
| a) Tautología      | b) Contradicción       |
| c) Indeterminación | d) No es satisfacible. |

**Solución:**

En este caso vamos a construir la tabla de verdad de la sentencia  $P_1 \oplus P_2$

p	q	r	$q/r$	$P_1$ $p \rightarrow (q/r)$	$P_2$ $r \leftrightarrow p$	$P_1 \oplus P_2$ $[p \rightarrow (q/r)] \oplus (r \leftrightarrow p)$
V	V	V	V	V	V	F
V	V	F	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	V
F	V	V	V	V	F	V
V	F	F	F	F	F	F
F	V	F	F	V	V	F
F	F	V	F	V	F	V
F	F	F	F	V	V	F

Obsérvese que la última columna tiene V y F, por lo que  $P_1 \oplus P_2$  es indeterminación. También vemos que es satisfacible ya que es V para alguna de las ocho interpretaciones.

Solución: La respuesta es c)

**Ejercicio nº 84.-** (Reserva septiembre 2001)

Sean  $P_1: p \rightarrow (q \wedge r)$  y  $P_2: r \leftrightarrow p$ . Entonces, de  $P_1$  se deduce:

- a)  $\neg P_1$                       b)  $P_2 \rightarrow P_2$                       c)  $P_2 \wedge \neg P_2$                       d)  $\neg P_1 \wedge \neg P_2$

**Solución:**

- ✚ Analicemos la alternativa a): Nos pregunta si  $P_1 \rightarrow \neg P_1$  es una tautología. Observamos que no lo es ya que si  $P_1 = V$  (que puede serlo) entonces  $\neg P_1 = F$  con lo que el condicional  $P_1 \rightarrow \neg P_1$  sería falso y, por tanto, no es tautología. Así que la alternativa a) es falsa.
- ✚ Analicemos la alternativa b): Nos pregunta si  $P_1 \rightarrow (P_2 \rightarrow P_2)$  es una tautología. Observamos que el consecuente  $P_2 \rightarrow P_2$  siempre es verdadero (es tautología) ya que si  $P_2 = V$ ,  $P_2 \rightarrow P_2$  es verdadero y si  $P_2 = F$  también. Como el consecuente de  $P_1 \rightarrow (P_2 \rightarrow P_2)$  es verdadero siempre, tome el valor que tome el antecedente  $P_1$ , (V o F), el condicional  $P_1 \rightarrow (P_2 \rightarrow P_2)$  será verdadero siempre, es decir, es tautología y por tanto podemos decir que de  $P_1$  se deduce el condicional  $P_2 \rightarrow P_2$ . Conclusión: La respuesta correcta es b)

**Ejercicio nº 85.-** (Reserva septiembre 2001)

¿Cuántas constantes de Skolem hace falta introducir en  $P: \forall x Qx$  para ponerla en forma clausulada?

- a) Ninguna                      b) Una                      c) Dos                      c) Catorce

**Solución:**

Cuando queremos expresar un predicado en forma clausulada, uno de los pasos a seguir es eliminar los cuantificadores existenciales. Estos, si no están afectados por un cuantificador universal, se eliminan introduciendo una constante de Skolem y si están afectados por un cuantificador universal se eliminan introduciendo una función de Skolem. Una vez eliminados los existenciales, se eliminan los cuantificadores universales, simplemente suprimiéndolos, pero permaneciendo cada una de las variables. Interpretamos esto como que el cuantificador no es visible pero la variable sigue cuantificada.

En el caso que nos ocupa,  $\forall x Qx$ , nos hay cuantificadores existenciales, por lo que la forma clausulada quedaría  $Qx$ , es decir:

☞  $\forall x Qx$  “Todo  $x$  es  $Q$ ”

☞  $Qx$  “Todo  $x$  es  $Q$ ” (una vez eliminado  $\forall$ ).

En la forma clausulada no hay constantes de Skolem.

Conclusión: La respuesta correcta es a)

**Ejercicio nº 86.-** (Reserva septiembre 2001)

Dadas las sentencias:  $P_1: \forall x \exists y (Qx \rightarrow Rxy)$  ;  $P_2: \forall x Qx$  ;  $P_3: \forall x \exists y Rxy$ , de  $P_1$  y  $P_2$  se deduce:

- a)  $P_3 \wedge \neg P_2$                       b)  $\neg P_3$   
c)  $P_3 \wedge P_2$                       d) Ninguna de las anteriores

**Solución:**

☞ Expresemos  $P_1$  en forma clausulada:

$$P_1: \forall x \exists y (Qx \rightarrow Rxy)$$

$$P_1: \forall x \exists y (\neg Qx \vee Rxy) \quad \text{hemos eliminado el condicional}$$

$$P_1: \forall x (\neg Qx \vee Rxf(x)) \quad \text{hemos eliminado el } \exists$$

$$P_1: \neg Qx \vee Rxf(x) \quad \text{hemos eliminado el } \forall$$

☞ Expresemos  $P_2$  en forma clausulada:

$$P_2: \forall x Qx$$

$$P_2: Qx \quad \text{hemos eliminado el } \forall$$

☞ De  $P_1$  y  $P_2$  deducimos:

$P_1: \neg Qx \vee Rxf(x)$  tenemos  $Qx$  negado

$P_2: Qx$  tenemos  $Qx$

$C_1: Rxf(x)$  es una conclusión

Observamos que esta conclusión no coincide con alguna de las alternativas, sin embargo, de  $C_1$  y  $P_2$  deducimos:

$C_1: Rxf(x)$  } deducimos:  $Rxf(x) \wedge Qx \equiv P_3 \wedge P_2$   
 $P_2: Qx$

ya que  $Rxf(x)$  es la forma clausulada de  $P_3$

Conclusión: La respuesta correcta es c)

### Ejercicio nº 87.-

Dadas las sentencias:  $P_1: \forall x \exists y (Rxy \rightarrow Qx)$  ;  $P_2: \forall x Qx$  , de  $P_1$  se deduce:

- a)  $\neg P_1$                       b)  $P_2 \wedge \neg P_2$   
 c)  $P_2 \vee \neg P_2$               d) Ninguna de las anteriores.

**Solución:**

§ Supongamos que  $P_1 = V$  (verdad).

Entonces no podemos deducir  $\neg P_1$  ya que  $\neg P_1 = F$  y por tanto  $P_1 \rightarrow \neg P_1$  sería  $F$  (falso). Por tanto, **a)** es falso.

Tampoco podemos deducir  $P_2 \wedge \neg P_2$  ya que  $P_2 \wedge \neg P_2 = F$  siempre, por lo que la sentencia  $P_1 \rightarrow P_2 \wedge \neg P_2$  sería falsa (recordemos que si el antecedente es verdadero y el consecuente falso, el condicional es falso). Por tanto, **b)** es falso.

Como  $P_2 \vee \neg P_2 = V$  (se trata de una tautología), podemos asegurar que la sentencia  $P_1 \rightarrow P_2 \vee \neg P_2$  es  $V$  siempre, por lo que podemos decir que de  $P_1$  se deduce  $P_2 \vee \neg P_2$ .

Conclusión: La respuesta correcta es c)

### Ejercicio nº 88.- (Reserva septiembre 2001)

Consideremos el siguiente modelo o interpretación  $M$  consistente en:

$U = \{0,1\}$  ;  $P = Q = \{1\}$  ;  $R = \{(1,1)\}$

Sean las sentencias :  $P_1: \forall x \exists y (Qx \rightarrow Rxy)$  ;  $P_2: \forall x Qx$

El modelo  $M$  satisface:

- a)  $\neg P_2$                       b)  $P_1 \wedge P_2$   
 c)  $\neg P_1 \wedge P_2$               d) Ninguna de las anteriores

**Solución:**

♥ Veamos si satisface a):  
 $\neg P_2 \equiv \neg \forall x Qx$  "No todo  $x$  del universo  $U$  es  $Q$ "  
 En efecto, es cierto que "no todo  $x$  de  $U$  es  $Q$ " ya que  $0 \in U$  y  $0 \notin Q$  ( $0$  no es  $Q$ , no tiene la propiedad  $Q$ ).  
 Conclusión: La respuesta es a)

### Ejercicio nº 89.- (Reserva septiembre 2001)

Sea  $P: r \leftrightarrow p$ .

Si  $T$  es tautología y  $A$  es absurdo o contradicción, entonces la frase  $A \leftrightarrow (P \leftrightarrow T)$  es:

- a)  $T$                       b)  $A$                       c) Indeterminada                      d) Es  $T$  y  $A$

**Solución:**

- ★ Razonemos el bicondicional  $P \leftrightarrow T$ :  
 $P$  puede ser  $V$  o  $F$ , ya que depende de los valores que tomen  $r$  y  $p$ .  
 Si  $P = V$ , entonces  $P \leftrightarrow T$  es  $V$  ya que  $T = V$  (por ser tautología).  
 Si  $P = F$ , entonces  $P \leftrightarrow T$  es  $F$  al ser  $T = V$ .  
 ★ Razonemos el bicondicional  $A \leftrightarrow (P \leftrightarrow T)$ :  
 Como  $A = F$  (por ser absurdo o contradicción), si  $P \leftrightarrow T$  es  $V$ , entonces la frase  $A \leftrightarrow (P \leftrightarrow T)$  es  $F$  (por la tabla de verdad de un bicondicional) y si  $P \leftrightarrow T$  es  $F$  entonces  $A \leftrightarrow (P \leftrightarrow T)$  es  $V$  (por la tabla de verdad de un bicondicional).

Por tanto, la frase  $A \leftrightarrow (P \leftrightarrow T)$  puede ser  $V$  o  $F$ , es decir, es indeterminada.

Conclusión: La respuesta correcta es c)

### Ejercicio nº 90.- (Reserva septiembre 2001)

$P: \forall x \exists y (Qx \rightarrow Rxy)$  es:

- a) Una tautología  
 b) Satisfacible, pero no tautología  
 c) Su negación es una contradicción permanente.  
 d) No hay ningún ejemplo que satisfaga su negación.

**Solución:**

Expresando  $P$  en forma clausulada tenemos  $P: \neg Qx \vee Rxf(x)$  (ver ejercicio 85)

Si  $\neg Qx = V$  y  $Rxf(x) = V$  entonces  $P = V$ , pero si  $\neg Qx = F$  y  $Rxf(x) = F$  será  $P = F$

Es decir,  $P$  se satisface para alguna interpretación, pero no es tautología.

Conclusión: La respuesta correcta es b)

**Ejercicio nº 91.-** (propuesto en septiembre 2001)

¿Cuántas constantes de Skolem hace falta introducir en  $P: \exists x(Qx \wedge Px)$  para ponerla en forma clausulada?

- a) Ninguna                      b) Una                      c) Dos                      d) Catorce

**Solución:**

Para poner  $P$  en forma clausulada eliminamos el cuantificador  $\exists$ , el cual, como no está afectado por ningún  $\forall$ , se elimina introduciendo una única constante de Skolem, ya que únicamente hay una variable  $x$  afectada por el mismo  $\exists$ .

Es decir:  $P: \exists x(Qx \wedge Px)$  se lee: "Existe un  $x$  que es  $P$  y es  $Q$ "

En forma clausulada sería:  $P: Qa \wedge Pa$  ( $a$  es la constante de Skolem)

Conclusión: La respuesta es **b)**

**Ejercicio nº 92.-** (propuesto en septiembre 2001)

Sean  $P_1: \forall x \exists y(Qx \rightarrow Rxy)$  ;  $P_2: \exists x(Qx \wedge Px)$  ;  $P_3: \exists x \exists y(Qx \wedge Rxy)$

De  $P_1$  y  $P_2$  se deduce:

- a)  $P_3 \wedge \neg P_2$                       b)  $\neg P_3$   
c)  $P_3 \wedge P_2$                       d) Ninguna de las anteriores.

**Solución:**

Analicemos la alternativa a):

Viendo  $P_1$  y  $P_2$  es fácilmente observable que puede ser, para algún modelo o interpretación, que  $P_1 = V$  y  $P_2 = V$ , con lo que  $P_1 \wedge P_2 = V$  y por tanto  $P_3 \wedge \neg P_2 = F$ , ya que no podría deducirse  $\neg P_2$  al ser  $P_2 = V$ . Por tanto, **a)** es falsa.

Analicemos las alternativas b) y c) al unísono:

Ya sabemos que de  $P_1$  y  $P_2$  se deduce  $P_3$ . Si somos capaces de demostrar que se deduce  $P_3$ , la respuesta sería c) y si demostramos que se deduce  $\neg P_3$  la respuesta será la alternativa b).

Veamos:

Lo haremos por refutación, es decir, vamos a suponer que  $P_3$  se deduce de  $P_1$  y  $P_2$  y veremos si  $P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3$  es o no contradicción. Si expresamos  $P_1$  y  $P_2$  y  $\neg P_3$  en formas clausuladas y si entre las clausulas obtenidas se encuentra la clausula vacía, deducimos que  $P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3$  es absurdo o contradicción, por lo que  $P_3$  se deduciría de  $P_1$  y  $P_2$ .

Expresemos las premisas en forma clausulada:

$$P_1: \neg Qx \vee Rxf(x)$$

$$P_2: Qa \wedge Pa$$

$$\neg P_3: \neg Qa \vee \neg Rab$$

Desglosamos  $P_2$  en clausulas:

$$P_1: \neg Qx \vee Rxf(x)$$

$$P_2^1: Qa$$

$$P_2^2: Pa$$

$$\neg P_3: \neg Qa \vee \neg Rab$$

■ De  $P_2^1$  y  $\neg P_3$  deducimos  $C_1: \neg Rab$

■ De  $C_1$  y  $P_1$  deducimos  $C_2: \neg Qx$

■ De  $P_2^1$  y  $C_2$  deducimos:  $\lambda$  (clausula vacía)

Al obtener la clausula vacía, concluimos un absurdo o contradicción, por lo que consideramos que  $P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3$  es absurdo o contradicción, es decir, no podemos suponer que  $\neg P_3$  es verdadero, por lo que debemos suponer  $P_3$ , esto es,  $P_3$  se deduce de  $P_1$  y  $P_2$ .

Si de  $P_1$  y  $P_2$  se deduce  $P_3$  y  $P_2$ , concluimos que se deduce  $P_3 \wedge P_2$

Conclusión: La respuesta correcta es c)

### **Ejercicio nº 93.-** (Propuesto en septiembre de 2001)

Un modelo o interpretación **M** consiste en:

$$U = \{0, 1, 2\}; P = Q = \{1\}; R = \{(0,1), ((1,1), (1,2), ((2,1), (2,2))\}$$

$$\text{Sean: } P_1: \forall x \exists y (Qx \rightarrow Rxy) \quad y \quad P_2: \exists x (Qx \wedge Px)$$

El modelo **M** satisface:

a)  $\neg P_2$

b)  $P_1 \wedge P_2$

c)  $\neg P_1 \wedge P_2$

d) Ninguna de las anteriores

**Solución:**

⊕ Analicemos la opción a):  $\neg P_2: \neg \exists x (Qx \wedge Px)$ .

Es decir: "No existe un  $x$  del universo  $U$  que sea  $Q$  y  $P$ "

Observamos que esta propuesta es falsa ya que existe un elemento de  $U$  (el 1) que es  $Q$  y también es  $P$ . Por tanto, la alternativa a) es falsa.

⊕ Analicemos la opción b):

Es fácilmente observable que  $P_2$  se cumple, ya que "existe un elemento (el 1) que es  $Q$  y es  $P$ ".

Ahora debemos ver si se cumple  $P_1$ . Veamos:

$P_1$ : "Para todo  $x$  de  $U$  existe un  $y$  tal que si  $x \in Q$  entonces  $(x,y) \in R$ "

⊗ Para  $x=0 \in U$ , como  $0 \notin Q$ , no es condición exigible que exista el  $y$ .

⊗ Para  $x=1 \in U$ , como  $1 \in Q$ , existe  $y=2 \in U$  tal que  $(1,2) \in R$ .

⊗ Para  $x=2 \in U$ , como  $2 \notin Q$ , no es condición exigible que exista el  $y$ .

Por tanto, se verifica  $P_1$  y como también se verifica  $P_2$ , entonces se verifica  $P_1 \wedge P_2$ .

Conclusión: La respuesta correcta es b)

**Ejercicio nº 94.-** (Propuesto en septiembre de 2001)

¿Cuál de estas afirmaciones respecto al valor de la función de pertenencia, para cada elemento de cualquier conjunto borroso, es verdadera?

- a) El modificador “*muy*” lo aumenta”
- b) El modificador “*no*” puede aumentarlo o disminuirlo.
- c) Al aplicar sucesivamente “*casi*” y “*bastante*” obtenemos el mismo valor.
- d) “*no*” conmuta con “*muy*”.

**Solución:**

- ☉ Imaginemos un universo  $U$  y un conjunto borroso  $A$  de  $U$ .
- ☉ Imaginemos que los elemento de  $U$  pertenecen al conjunto  $A$  con un grado de pertenencia que puede valer entre 0 y 1 (ambos valores incluidos).
- ☉ Imaginemos que el grado de pertenencia de cada elemento de  $U$  a  $A$  viene determinado por una función, es decir:

$$\forall x \in U ; \mu_A(x) = \text{grado de pertenencia de } x \text{ a } A$$

$$0 \leq \mu_A(x) \leq 1$$

- ☉ Analicemos ahora la alternativa a):  
Consideremos el conjunto  $B = \text{muy } A$ , el cual será también un conjunto borroso del universo  $U$ .  
Sea  $x \in U$  tal que  $\mu_A(x)$  es su grado de pertenencia al conjunto  $A$ .  
El grado de pertenencia de  $x$  al conjunto  $B = \text{muy } A$  será, por definición del modificador “*muy*” :  
 $I(\text{muy } A(x)) = \mu_B(x) = \text{CON}(\mu_A(x)) = [\mu_A(x)]^2 \leq \mu_A(x)$  (por ser  $0 \leq \mu_A(x) \leq 1$ )  
Es decir, el modificador “*muy*” **no aumenta** el grado de pertenencia que tiene  $x$  al conjunto  $A$  al que tendrá en el conjunto  $B = \text{muy } A$ .  
Por tanto, la alternativa a) es falsa.
  - ☉ Analicemos ahora la alternativa b):  
Consideremos el conjunto  $C = \text{no } A = \neg A$ , el cual también será borroso.  
En este caso:  $I(\neg A(x)) = \mu_C(x) = \text{NEG}(\mu_A(x)) = 1 - \mu_A(x)$ 
    - ☉ Si  $0 \leq \mu_A(x) < 0.5$  entonces  $\mu_C(x) > \mu_A(x)$  (el grado de pertenencia de  $x$  al conjunto  $C = \neg A$  es superior al que tiene en  $A$ ).
    - ☉ Si  $0.5 < \mu_A(x) \leq 1$  entonces  $\mu_C(x) < \mu_A(x)$  (el grado de pertenencia de  $x$  al conjunto  $C = \neg A$  es inferior al que tiene en  $A$ ).
    - ☉ Si  $\mu_A(x) = 0.5$  entonces  $\mu_C(x) = \mu_A(x) = 0.5$  (el grado de pertenencia de  $x$  al conjunto  $C = \neg A$  es igual al que tiene en  $A$ ).
- Por tanto, el modificador “*no*” puede aumentarlo o disminuirlo (también puede dejarlo igual).

Conclusión: La respuesta correcta es **b)**

**Ejercicio nº 95.-**

Si  $A = \left\{ 0|0.75, 1|0.7, 2|1, 3|0.4 \right\}$  es un conjunto borroso, podemos obtener  $\mu$  (2.5)

Por interpolación lineal y su valor es igual a:

a)  $\mu(0)$ b)  $\mu(1)$ c)  $\mu(2)$ d)  $\mu(3)$ **Solución:**

Es un problema de proporciones:  $\mu(2)=1$  y  $\mu(3)=0'4$

A una diferencia de  $3-2=1$  le corresponde una diferencia  $\mu(3)-\mu(2)=-0'6$

A una diferencia de  $2'5-2=0'5$  le corresponderá una diferencia  $\mu(2'5)-\mu(2)=d$

Entonces:

$d \cdot 1 = -0'6 \cdot 0'5 = -0'3$ , es decir,  $d = -0'3$ , de donde  $\mu(2'5) = \mu(2) + d = 1 + (-0'3) = 0'7$

Por tanto:  $\mu(2'5) = 0'7 = \mu_A(1)$

Conclusión: La respuesta correcta es **b)**

**Ejercicio nº 96.-** (propuesto en junio de 2001)

La relación compuesta  $P \circ U$ , donde  $P$  es una relación borrosa cualquiera y  $U$  es la relación borrosa universal (de matriz todos unos) tiene por representación una matriz con sus elementos:

- a) Todos unos.
- b) No siempre da una matriz con todos unos o todos ceros.
- c) Siempre da una matriz con todos ceros.
- d) Ninguna de las anteriores.

**Solución:**

La matriz de la relación compuesta  $P \circ U$  se obtiene mediante un algoritmo que consiste en "multiplicar" la matriz asociada a la relación  $P$  (que estará formada por números comprendidos entre 0 y 1, ambos incluidos) con la matriz  $U$  (formada por 1) y de tal modo que cada elemento de la nueva matriz se elige por el método del **maximín**, es decir:

Cada elemento de la nueva matriz está formada por una suma de dos o más productos de dos factores cada uno de ellos.

De cada producto elegimos el factor mínimo, teniendo así dos o mas números.

De todos esos números elegimos el máximo de ellos, el cuál será el término que ocupe una posición en la matriz  $P \circ U$ .

Este procedimiento no garantiza que todos los términos de la matriz obtenida sean unos, ni todos ceros, ni solamente unos y ceros, es decir, pueden ser números cualesquiera entre 0 y 1.

Pongamos un ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 0'2 & 0 \\ 1 & 0'8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0'2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 0'2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 0'8 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0'8 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \max(0'2, 0) & \max(0'2, 0) \\ \max(1, 0'8) & \max(1, 0'8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0'2 & 0'2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Conclusión: La respuesta correcta es **b)**

**Ejercicio nº 97.-** (Propuesto en septiembre de 2001)

Un modelo o interpretación **M** consiste en:

$$U = \{0, 1, 2\} ; P = Q = \{1\} ; R = \{(0,1), ((1,1), (1,2), ((2,1), (2,2)) \}$$

$$\text{Sea: } \forall x \exists y (Qx \rightarrow Rxy)$$

El modelo **M**, respecto de **P** satisface:

- a) La satisface (la convierte en una proposición verdadera)
- b) Es un contraejemplo para ella (no la satisface)
- c) No se puede averiguar
- d) Ninguna de las anteriores.

**Solución:**

La lectura de la proposición  $\forall x \exists y (Qx \rightarrow Rxy)$  es la siguiente:

*“Para todo elemento  $x$  del universo  $U$ , existe otro elemento  $y$  (que puede ser el mismo  $x$ ) de  $U$  tal que si  $x$  está en  $Q$  entonces  $(x,y)$  está en  $R$ ”*

Como el universo  $U$  sólo tiene tres elementos, podemos comprobar el enunciado con cada uno de ellos:

- ① Para  $x = 0 \in U$ , como  $0 \notin Q$ , no se exige que  $\exists y \in U$  tal que  $(0,y) \in R$
- ② Para  $x = 1 \in U$ , como  $1 \in Q$ ,  $\exists y = 2 \in U$  tal que  $(1,2) \in R$
- ③ Para  $x = 2 \in U$ , como  $2 \notin Q$ , no se exige que  $\exists y \in U$  tal que  $(0,y) \in R$

Por tanto, podemos asegurar que el modelo **M** convierte a la proposición **P** en un enunciado verdadero.

Conclusión: La respuesta correcta es **a)**

**Ejercicio nº 98.-** (Propuesto en septiembre de 2001)

Un modelo o interpretación **M** consiste en:

$$U = \{0, 1, 2\} ; P = Q = \{1\} ; R = \{(0,1), ((1,1), (1,2), ((2,1), (2,2)) \}$$

En lógica con identidad, si  $i$  representa el descriptor, en el modelo **M** resulta correcto que

- a)  $0 = ixRxx$
- b)  $1 = ix\forall yRxy$
- c)  $2 = ix(\neg Rxx)$
- d) Ninguna de las anteriores.

**Solución:**

Analicemos la alternativa a):

$0 = xRxx$  nos dice que 0 es el único elemento del universo  $U$  que está relacionado consigo mismo.

Evidentemente es falso puesto que 0 no está relacionado con 0 al ocurrir que  $(0,0) \notin R$ .

Analicemos la alternativa b):

$1 = ix\forall yRxy$  nos dice que 1 es el único elemento del universo  $U$  tal que existe otro elemento  $y \in U$  que verifica que  $(1,y) \in R$ .

Evidentemente es falso puesto que, aunque existe  $y=2$  tal que  $(1,2) \in R$ , no es el único, ya que para  $x=0$  existe el  $y=1$  tal que  $(0,1) \in R$ .

Analicemos la alternativa c):

$2 = ix(\neg Rxx)$  nos dice que 2 es el único elemento de  $U$  que no está relacionado

consigo mismo.

Evidentemente es falso ya que  $(2,2) \in R$ , es decir, sí lo está.

Por tanto, a), b) y c) son falsos.

Conclusión: La respuesta correcta es **d)**

### Ejercicio nº 99.-

Si  $p \wedge q \wedge r$  fuese una proposición de la lógica trivalente de Lukasiewicz, entonces, su valor de verdad para  $p = q = r = \frac{1}{2}$  sería:

- a) 0                      b)  $\frac{1}{2}$                       c) 2                      d) 1

#### **Solución:**

Descartamos la alternativa c) ya que en la lógica trivalente de Lukasiewicz los valores posibles que puede tomar una proposición son tres: 0,  $\frac{1}{2}$  y 1.

En esta lógica, el valor de verdad de  $p \wedge q \wedge r$  es:

$$(p \wedge q \wedge r) = \min(p, q, r) = \min(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

Conclusión: La respuesta correcta es **b)**

### Ejercicio nº 100.- (Reserva septiembre de 2001)

Sean las proposiciones:

$P_1$  : p es imposible

$P_2$  : no es imposible  $\neg p$

La expresión  $P_1$  equivale a:

- a)  $P_2$                       b)  $\neg P_2$   
c)  $P_2 \wedge \neg P_2$                       d) Ninguna de las anteriores.

#### **Solución:**

Expresemos las proposiciones  $P_1$  y  $P_2$  con la simbología de la lógica modal:

$P_1$  :  $\neg \Diamond p$  "es imposible que p"

$P_2$  : no(es imposible que  $\neg p$ )  $\equiv \neg(\neg \Diamond \neg p) \equiv \neg \neg \Diamond \neg p \equiv \Diamond \neg p$

Analicemos la alternativa a):

Nos pregunta si  $P_1 \equiv P_2$

Observamos que  $\neg \Diamond p \neq \Diamond \neg p$

Por tanto, a) es falsa.

Analicemos la alternativa b):

Nos pregunta si  $P_1 \equiv \neg P_2$

Observamos que  $\neg \Diamond p \neq \neg \Diamond \neg p$

Por tanto, b) es falsa.

Analicemos la alternativa c):

Nos pregunta si  $P_1 \equiv P_2 \wedge \neg P_2$

Observamos que  $P_2 \wedge \neg P_2$  es una contradicción (es siempre falsa), por lo que si  $P_1$  es verdadero, no puede ser equivalente a  $P_2 \wedge \neg P_2$ .

Por tanto, c) es falsa.

Conclusión: La respuesta correcta es **d)**

**Ejercicio nº 101.-** (Propuesto en septiembre de 2001)

Cierto modelo o interpretación **M** consiste en:

$U = \{0, 1, 2\}$  ;  $P = Q = \{1\}$  ;  $R = \{(0,1), ((1,1), (1,2), ((2,1), (2,2))\}$

El complemento de **R** en  $U \times U$  tiene un número de pares ordenados que es:

- a) 3                      b) 1                      c) 2                      d) 4

**Solución:**

El conjunto **U** tiene 3 elementos, es decir,  $\text{card}(U) = 3$

El conjunto  $U \times U$  tiene 9 elementos, es decir,  $\text{card}(U \times U) = \text{card}(U) \cdot \text{card}(U) = 3^2 = 9$

Como **R** tiene 5 elementos, entonces **R<sup>c</sup>** (complemento de **R**) tendrá 4 elementos.

No obstante vamos a construir el conjunto que determina la relación **R<sup>c</sup>**:

$R^c = \{(x,y) \mid x \in U, y \in U, (x,y) \notin R\} = \{(0,0), (0,2), (1,0), (2,0)\}$

Observamos que  $\text{card}(R^c) = 4$

Conclusión: La respuesta correcta es **d)**

**Ejercicio nº 102.-** (Propuesto en septiembre de 2001)

Cierto modelo o interpretación **M** consiste en:

$U = \{0, 1, 2\}$  ;  $P = Q = \{1\}$  ;  $R = \{(0,1), (1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$

Si respecto del modelo **M**, **R'** es la recíproca o inversa de **R** en  $U \times U$ , entonces el complemento de  $R \cup R'$  en  $U \times U$  tiene un número de elementos que es:

- a) 2                      b) 3                      c) 1                      d) Ninguno de los anteriores

**Solución:**

□ Construyamos la recíproca de **R**:

$R' = \{(y,x) \mid (x,y) \in R\} = \{(1,0), (1,1), (2,1), (1,2), (2,2)\}$

□ Construyamos  $R \cup R'$ :

$R \cup R' = \{(x,y) \mid (x,y) \in R \text{ o } (x,y) \in R'\} =$   
 $= \{(0,1), (1,0), (1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$

□ Construyamos el complemento de  $R \cup R'$ :

$(R \cup R')^c = \{(x,y) \mid (x,y) \notin R \cup R'\} = \{(0,0), (0,2), (2,0)\}$

Vemos que  $\text{card}[(R \cup R')^c] = 3$

Conclusión: La respuesta correcta es **b)**

**Ejercicio nº 103.-** (Propuesto en septiembre de 2001)

Si  $P: p \leftrightarrow (q \wedge r)$  es una proposición de la lógica trivalente de Lukasiewicz, entonces su valor de verdad para  $p = q = r = \frac{1}{2}$  será:

- a) 0                      b)  $\frac{1}{2}$                       c) 2                      d) 1

**Solución:**

La alternativa c) queda descartada ya que en la lógica trivalente de Lukasiewicz los valores posibles son 0, 1 y  $\frac{1}{2}$ .

Si  $q = \frac{1}{2}$  y  $r = \frac{1}{2}$  entonces  $q \wedge r = \min(q, r) = \min(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ .

Si  $p = \frac{1}{2}$ . y  $q \wedge r = \frac{1}{2}$  entonces (por definición del valor de verdad del bicondicional)

$$\left[ p \leftrightarrow (q \wedge r) \right] = 1 - \left| p - (q \wedge r) \right| = 1 - \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right| = 1 - 0 = 1$$

Conclusión: La respuesta correcta es **d)**

### **Ejercicio nº 104.-** (Propuesto en junio de 2001)

Cierto modelo o interpretación M consiste en:

$$U = \{0,1\} ; P = U ; Q = \emptyset ; R = \{(0,0), (0,1), (1,0)\}$$

Para este modelo, R es:

- |                                       |                  |
|---------------------------------------|------------------|
| a) Transitiva                         | b) Antisimétrica |
| c) La relación universal $U \times U$ | d) Simétrica     |

**Solución:**

⊗ Analicemos la alternativa a):

Una relación R es transitiva si cumple lo siguiente:

$$\forall xyz \left[ (Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz \right]$$

Es falsa porque observamos que  $R10 \wedge R01$  es verdadera y sin embargo  $R11$  es falsa.

⊗ Analicemos la alternativa b):

Una relación R es antisimétrica si cumple lo siguiente:

$$\forall xy \left[ (Rxy \wedge Ryx) \rightarrow x = y \right]$$

Es falsa ya que observamos que  $R01 \wedge R10$  es verdadera, pero  $0 = 1$  es falsa.

⊗ Analicemos la alternativa c):

La relación universal  $U \times U$  sería:  $U \times U = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$

Observamos que  $R = \{(0,0), (0,1), (1,0)\} \neq U \times U$ , por lo que es falsa.

⊗ Analicemos la alternativa d):

Una relación R es simétrica si cumple lo siguiente:

$$\forall xy (Rxy \rightarrow Ryx)$$

Observamos que:  $R00$  es V y  $R00$  también

$R01$  es V y  $R10$  también

$R10$  es V y  $R01$  también

Es decir, en todos los casos en que  $Rxy$  es V, ocurre que  $Ryx$  también lo es.

Por tanto, la relación R es simétrica.

Conclusión: La respuesta correcta es **d)**

### **Ejercicio nº 105.-** (Propuesto en junio de 2001)

La proposición  $P: \forall x \exists y (Rxy \rightarrow Px)$  es:

- Una tautología
- Satisfacible pero no tautología
- Su negación es una contradicción permanente.
- No hay ningún ejemplo que satisfaga su negación.

**Solución:**

Observamos que las alternativas a), b) y c) son la misma propuesta expresadas de distintas formas, ya que si  $P$  es una tautología, su negación es contradicción y si no existe un ejemplo que satisfaga su negación es porque es universalmente válida, es decir, tautología.

A raíz de esto, sospechamos que la respuesta correcta debe ser b). Razonemos:

Es fácilmente comprensible que podemos construir un modelo con un universo  $U$ , un conjunto  $P \subset U$  y una relación  $R \subset U \times U$  tal que  $Rxy$  sea verdadera y  $Px$  también, con lo que  $P$  sería satisfacible, pero que también existan  $z, y \in U$  tales que  $Rzy$  fuese verdadera y  $Pz$  fuese falsa, con lo que  $P$  ya no sería tautología (recuerda que si el antecedente es  $V$  y el consecuente es  $F$ , el condicional es  $F$ ).

Es decir,  $P$  es satisfacible pero no tautología.

Conclusión: La respuesta correcta es **b)**

**Ejercicio nº 106.-** (Propuesto en junio de 2001)

La forma clausulada de la proposición  $P: (r \wedge q) \rightarrow \neg p$  es:

- |                                   |                                     |
|-----------------------------------|-------------------------------------|
| a) $p \wedge q \wedge \neg r$     | b) $\neg p \vee \neg q \vee \neg r$ |
| c) $\neg(r \wedge q) \vee \neg p$ | d) Ninguno de los anteriores.       |

**Solución:**

Expresemos  $P$  en forma clausulada:

≍ Eliminamos el condicional:  $\neg(r \wedge q) \vee \neg p$

expresión que coincide con la alternativa c) pero no es una forma clausulada.

≍ Eliminamos el paréntesis (leyes de Morgan):  $\neg r \vee \neg q \vee \neg p$

≍ Por la propiedad conmutativa para la disyunción  $\vee$ :  $\neg r \vee \neg q \vee \neg p = \neg p \vee \neg q \vee \neg r$  que es una expresión en forma clausulada (es una clausula).

Observamos que coincide con la alternativa b)

Conclusión: La respuesta correcta es **b)**.

**Ejercicio nº 107.-** (Propuesto en junio de 2001)

Sean  $P_1: \forall x \exists y (Rxy \rightarrow Px)$  ;  $P_2: \exists x \forall y (Qx \rightarrow \neg Rxy)$  ;  $P_3: \exists x (Px \wedge Qx)$

De  $P_1$  y  $P_2$  se deduce:

- |                          |                              |
|--------------------------|------------------------------|
| a) $P_3 \wedge \neg P_2$ | b) $\neg P_3$                |
| c) $P_3 \wedge P_2$      | d) Ninguna de las anteriores |

**Solución:**

Analizamos la alternativa a):

Para cualquier modelo  $M$  que exista formado por un universo  $U$ , dos conjuntos  $P$  y  $Q$  de  $U$  y una relación  $R \subset U \times U$  tal que  $P_1$  y  $P_2$  fuesen verdaderas y por tanto  $P_1 \wedge P_2$  también lo será, la negación  $\neg P_2$  sería falsa y, por tanto,  $P_3 \wedge \neg P_2$  también lo sería, por lo que el condicional  $(P_1 \wedge P_2) \rightarrow (P_3 \wedge \neg P_2)$  es falso y por tanto, de  $P_1$  y  $P_2$  no se deduce  $P_3 \wedge \neg P_2$

Por tanto, la alternativa a) es falsa.

Analicemos las alternativas b) y c):

Respecto a la alternativa c) diremos que  $P_2$  se deduce de  $P_1 \wedge P_2$ , por lo que debemos ver si se deduce  $P_3$  (en cuyo caso deducimos  $P_1 \wedge P_2$ ) o  $\neg P_3$  (en este caso la respuesta correcta sería la alternativa b)).

¿Podemos decir que de  $P_1 \wedge P_2 \rightarrow P_3$  es verdadero siempre que lo sea el antecedente?

Contestar afirmativamente a esta pregunta sería asegurar que para todo modelo  $M$  que construyamos, tales que  $P_1 = V$ ,  $P_2 = V$  y, por tanto  $P_1 \wedge P_2 = V$ , entonces tendrá que ser  $P_3 = V$  (pues si fuese  $F$ ,  $P_1 \wedge P_2 \rightarrow P_3$  sería  $F$ ).

Si somos capaces de encontrar un modelo  $M$  tal que  $P_1 = V$ ,  $P_2 = V$  y  $P_3 = F$  entonces habremos demostrado que  $P_1 \wedge P_2 \rightarrow P_3$  es  $F$  y, por tanto  $P_1 \wedge P_2 \rightarrow P_3 \wedge P_2$  también.

Consideremos el siguiente modelo  $M$ :

$U$  = Un universo cualquiera

Sean los conjuntos de  $U$ :  $P = Q = \emptyset \subset U$

Sea la relación de elementos de  $U$ :  $R = \emptyset \subset U \times U$

Para este modelo  $M$  observamos que:

$P_1: \forall x \exists y (Rxy \rightarrow Px)$  es verdadero

$P_2: \exists x \forall y (Qx \rightarrow \neg Rxy)$  es verdadero

$P_3: \exists x (Px \wedge Qx)$  es falso

Es decir, hemos encontrado un modelo  $M$  tal que  $P_1 \wedge P_2 = V$  y  $P_3 = F$ , por lo que podemos asegurar que de  $P_1$  y  $P_2$  no se deduce  $P_3 \wedge P_2$  (aunque existan modelos que si satisfagan el condicional  $P_1 \wedge P_2 \rightarrow P_3 \wedge P_2$ ).

Por tanto, la alternativa c) es falsa.

Analicemos la alternativa b):

Si somos capaces de construir otro modelo o interpretación  $T$  tal que  $P_1 = V$ ,  $P_2 = V$  y  $\neg P_3 = F$ , entonces deducimos que de  $P_1$  y  $P_2$  no se deduce  $\neg P_3$  (aunque existan otros modelos que satisfagan el condicional  $P_1 \wedge P_2 \rightarrow \neg P_3$ ).

Consideremos el siguiente modelo  $T$ :

$U$  = Un universo cualquiera

Sean los conjuntos de  $U$ :  $P = Q = U$

Sea la relación de elementos de  $U$ :  $R = \emptyset \subset U \times U$

Para este modelo  $T$  observamos que:

$P_1: \forall x \exists y (Rxy \rightarrow Px)$  es verdadero

$P_2: \exists x \forall y (Qx \rightarrow \neg Rxy)$  es verdadero

$\neg P_3: \neg \exists x (Px \wedge Qx)$  es falso

Es decir, hemos encontrado un modelo  $T$  tal que  $P_1 \wedge P_2 = V$  y  $\neg P_3 = F$ , por lo que podemos asegurar que de  $P_1$  y  $P_2$  no se deduce  $\neg P_3$  (aunque existan modelos que si satisfagan el condicional  $P_1 \wedge P_2 \rightarrow \neg P_3$ ).

Por tanto, la alternativa b) es falsa.

Es decir, a), b) y c) son falsas.

Conclusión: La respuesta correcta es d)

**Ejercicio nº 108.-** (Propuesto en junio de 2001)

Sean:  $P_1: \forall x \exists y (Rxy \rightarrow Px)$  ;  $P_2: \exists x \forall y (Qx \rightarrow \neg Rxy)$

De  $P_1$  se deduce:

- |                        |                          |
|------------------------|--------------------------|
| a) $\neg P_1$          | b) $P_2 \wedge \neg P_2$ |
| c) $P_2 \vee \neg P_2$ | d) $\neg P_1 \wedge P_2$ |

**Solución:**

Imaginemos todos los modelos  $M$  en los que  $P_1$  es verdadera.

Analicemos la alternativa a):

Si  $P_1 = V$  entonces  $\neg P_1 = F$  y por tanto  $P_1 \rightarrow \neg P_1$  será falsa, es decir, de  $P_1$  no deducimos  $\neg P_1$ .

Por tanto, la alternativa a) es falsa.

Analicemos la alternativa b):

Nos preguntan si el condicional  $P_1 \rightarrow P_2 \wedge \neg P_2$  es V en todos los modelos  $M$  en los que  $P_1$  es verdadera. Es evidente que ese condicional será F ya que el consecuente es una contradicción en todos los casos (sea el modelo que sea), por lo que podemos asegurar que de  $P_1$  no se deduce  $P_2 \wedge \neg P_2$ .

Por tanto, la alternativa b) es falsa.

Analicemos la alternativa c):

Nos preguntan si el condicional  $P_1 \rightarrow P_2 \vee \neg P_2$  es V en todos los modelos  $M$  en los que  $P_1$  es verdadera. Evidentemente ese condicional es siempre verdadero ya que el consecuente es una tautología, es decir, es V sea cual sea el modelo  $M$ , por lo que podemos asegurar que de  $P_1$  se deduce  $P_2 \vee \neg P_2$ .

Por tanto, la alternativa c) es verdadera.

Analicemos la alternativa d):

Nos preguntan si el condicional  $P_1 \rightarrow \neg P_1 \wedge P_2$  es V en todos los modelos  $M$  en los que  $P_1$  es verdadera. Evidentemente ese condicional es siempre falso ya que el consecuente es falso por ser  $\neg P_1$  falso ( $\neg P_1 \wedge P_2 = F$ ), es decir, el condicional es F sea cual sea el modelo  $M$ , por lo que podemos asegurar que de  $P_1$  no se deduce  $\neg P_1 \wedge P_2$ .

Por tanto, la alternativa d) es falsa.

Conclusión: La respuesta correcta es c)

**Ejercicio nº 109.-** (Propuesto en junio de 2001)

Sea el modelo o interpretación  $M$  siguiente:

$$U = \{0,1\} ; P = U ; Q = \{ \} ; R = \{ (0,0), (0,1), (1,0) \}$$

Sean las siguientes propuestas:  $P_1: \forall x \exists y (Rxy \rightarrow Px)$  ;  $P_2: \exists x \forall y (Qx \rightarrow \neg Rxy)$

Entonces, el modelo  $M$  satisface:

- |                          |                               |
|--------------------------|-------------------------------|
| a) $\neg P_2$            | b) $P_1 \wedge P_2$           |
| c) $\neg P_1 \wedge P_2$ | d) Ninguna de las anteriores. |

**Solución:**

Analicemos la alternativa a):

Para ello eliminamos los cuantificadores y el condicional en  $P_2$  y posteriormente expresemos la negación  $\neg P_2$ .

$$\begin{aligned}
 P_2 : \exists x \forall y (Qx \rightarrow \neg Rxy) &\equiv \forall y (Qa \rightarrow \neg Ray) \equiv \\
 &\equiv (Qa \rightarrow \neg Ray) \equiv \neg Qa \vee \neg Ray \equiv \neg (Qa \wedge Ray) \\
 \neg P_2 : \neg \neg (Qa \wedge Ray) &\equiv Qa \wedge Ray
 \end{aligned}$$

El significado de  $\neg P_2$  es: “Existe un elemento del universo  $U$  que es  $Q$  y está relacionado con otro elemento  $y$ ”

Podemos observar que este enunciado es falso ya que  $Q = \emptyset$  (ningún elemento es  $Q$ ).

Por tanto, el modelo  $M$  no satisface  $\neg P_2$ , esto es, la alternativa a) es falsa.

Analicemos la alternativa b):

Vamos a eliminar los cuantificadores y el condicional en  $P_1$ :

$$\begin{aligned}
 P_1 : \forall x \exists y (Rxy \rightarrow Px) &\equiv \forall x (Rxf(x) \rightarrow Px) \equiv \\
 &\equiv (Rxf(x) \rightarrow Px) \equiv \neg Rxf(x) \vee Px
 \end{aligned}$$

Es decir: “Todo  $x$  de  $U$ , o es  $P$  o no está relacionado con otro elemento  $y$ ”

Observamos que  $P_1$  es verdadero en el modelo  $M$  ya que todo elemento del universo  $U$  es  $P$  puesto que  $P = U$ . Es decir,  $P_1 = \text{Verdadero}$ .

Si “leemos”  $P_2$  tenemos: “No existe un elemento  $a$  de  $U$  que sea  $Q$  y que esté relacionado con otro elemento  $y$ ”

Observamos que este enunciado es verdadero ya que  $Q = \emptyset$  (ningún elemento es  $Q$ ), es decir,  $P_2 = V$ . Como  $P_1 = V$  y  $P_2 = V$  entonces  $P_1 \wedge P_2 = V$ , esto es, el modelo  $M$  satisface  $P_1 \wedge P_2$ .

Por tanto, la alternativa b) es correcta.

Analicemos la alternativa c):

Hemos visto que el modelo  $M$  satisface  $P_1$  y  $P_2$ , por lo que no puede satisfacer  $\neg P_1$  ( $\neg P_1 = F$ ) y por tanto, tampoco  $\neg P_1 \wedge P_2$ , es decir, será  $\neg P_1 \wedge P_2 = F$ .

Así que la alternativa c) es falsa.

Conclusión: La respuesta correcta es b)

### Ejercicio nº 110.-

Sea el modelo o interpretación  $M$  siguiente:

$$U = \{0,1\} ; P = U ; Q = \{0\} ; R = \{ (0,0) , (0,1) , (1,0) \}$$

Sean las siguiente propuestas:  $P_1 : \forall x \exists y (Rxy \rightarrow Px)$  ;  $P_2 : \exists x \forall y (Qx \rightarrow \neg Rxy)$

Entonces, el modelo  $M$  satisface:

- |                          |                               |
|--------------------------|-------------------------------|
| a) $\neg P_2$            | b) $P_1 \wedge P_2$           |
| c) $\neg P_1 \wedge P_2$ | d) Ninguna de las anteriores. |

**Solución:**

Analicemos la alternativa a):

$$\begin{aligned}
 P_2 : \exists x \forall y (\neg Qx \vee \neg Rxy) &\equiv \forall y (\neg Qa \vee \neg Ray) \equiv \\
 &\equiv \neg Qa \vee \neg Ray \equiv \neg (Qa \wedge Ray) \equiv \neg (Qa \wedge Rax) \\
 \neg P_2 : \neg \neg (Qa \wedge Rax) &\equiv Qa \wedge Rax
 \end{aligned}$$

El significado de  $\neg P_2$  es: “Existe un elemento  $a \in U$  tal que  $a \in Q$  y  $(a, x) \in R$ , siendo  $x$  otro elemento cualquiera de  $U$ ”

Observamos que es verdadero, ya que hay un elemento que es  $Q$  (el 0) y además 0 está relacionado con otro elemento (con el 1) ya que  $(0, 1) \in R$

Por tanto, la alternativa **a)** es verdadera. Ya sabemos que la respuesta correcta es **a)**, pero analizaremos el resto de alternativas.

Analicemos la alternativa **b)**:

$$\begin{aligned} P_1 : \forall x \exists y (Rxy \rightarrow Px) &\equiv \forall x \exists y (\neg Rxy \vee Px) \equiv \\ &\equiv \forall x (\neg Rxf(x) \vee Px) \equiv \neg Rxf(x) \vee Px \\ P_2 : \neg (Qa \wedge Rax) \end{aligned}$$

El significado de  $P_1$  es: “Todo  $x$  es  $P$  o ningún elemento de  $U$  está relacionado con otro elemento”

Observamos que  $P_1 = V$  porque, al ser  $P = U$ , todo  $x$  es  $P$ .

El significado de  $P_2$  es: “Ningún  $a$  de  $U$  es  $Q$  y está relacionado con otro elemento  $x$  de  $U$ ”

Observamos que  $P_2 = F$  porque hay un elemento que es  $Q$  (el 0) y además 0 está relacionado con otro elemento (con el 1) ya que  $(0, 1) \in R$ .

Por tanto,  $P_1 \wedge P_2 = F$ , es decir, la respuesta **b)** es falsa.

Analicemos la alternativa **c)**:

Acabamos de ver que  $P_1 = V$ , por lo que  $\neg P_1 = F$ . También hemos visto que  $P_2 = F$  y como consecuencia será  $\neg P_1 \wedge P_2 = F$

Por tanto, la alternativa **c)** es falsa.

Conclusión: La respuesta correcta es **a)**

### **Ejercicio nº 111.-** (Propuesto en junio de 2001)

Sea el modelo o interpretación **M** siguiente:

$$U = \{0, 1\}; P = U; Q = \emptyset; R = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\}$$

Sea la siguiente propuesta:  $P_1 : \forall x \exists y (Rxy \rightarrow Px)$

El modelo **M**, respecto  $P_1$ :

- a) La satisface (la convierte en una proposición verdadera)
- b) Es un contraejemplo para ella (no la satisface)
- c) No se puede averiguar.
- d) Ninguna de las anteriores.

#### **Solución:**

Interpretemos el significado de  $P_1$ . Para ello eliminaremos el condicional y los cuantificadores:

$$\begin{aligned} P_1 : \forall x \exists y (Rxy \rightarrow Px) &\equiv \forall x \exists y (\neg Rxy \vee Px) \equiv \\ &\equiv \forall x (\neg Rxf(x) \vee Px) \equiv \neg Rxf(x) \vee Px \end{aligned}$$



**Solución:**

⇒  $P_1$  es suficiente para  $P_2$  si  $P_1 \rightarrow P_2$  es tautología. Veamos:

Vamos a construir la tabla de verdad de  $P_1 \rightarrow P_2$ . Como sólo depende de tres variables ( $p, q, r$ ) tendremos  $2^3=8$  interpretaciones.

p	q	r	$p \wedge q$	$q \vee r$	$(q \vee r) \rightarrow p$	$(p \wedge q) \rightarrow r$	$[(q \vee r) \rightarrow p] \rightarrow [(p \wedge q) \rightarrow r]$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	F
V	F	V	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V	V	V
F	V	F	F	V	F	V	V
F	F	V	F	V	F	V	V
F	F	F	F	F	V	V	V

Observamos que para una interpretación ( $p=V$ ;  $q=V$  y  $r=F$ ) el condicional  $P_1 \rightarrow P_2$  es **Falso**, es decir,  $P_1$  **no es suficiente para  $P_2$** . Esto hace que la propuesta " $P_1$  es suficiente pero no necesario para  $P_2$ " sea FALSA.  
Conclusión: La alternativa correcta es **b)**

Hagamos otro razonamiento:

Vamos a emplear el método de **Refutación**. Este método consiste en considerar **Falsa** la sentencia que deseamos validar. Si nos encontramos con un absurdo o contradicción, es que la sentencia no puede ser Falsa para ninguna interpretación, es decir, se trata de una tautología. Si al considerar que es Falsa no llegamos a ningún absurdo, es porque es posible que sea **Falsa**, es decir, no es tautología. Veamos:

$[(q \vee r) \rightarrow p]$				$\rightarrow [(p \wedge q) \rightarrow r]$		
			<b>F</b>			
	V				F	
				V		F
V		V				
	V		F		F	

Línea 1: Hemos supuesto que el condicional es **F**.

Línea 2: Como el condicional es **F**, el antecedente debe ser **V** y el consecuente **F**.

Línea 3: Si nos fijamos en el consecuente (que es un condicional), su antecedente debe ser **V** y su consecuente **F**.

Línea 4: Como  $p \wedge q = V$ , será  $p=V$  y  $q=V$ . Podemos asegurar que  $q \vee r = V$  y  $p = V$

Línea 5: De la línea anterior deducimos que el antecedente  $P_1$  es **V**. Como el

consecuente  $P_2$  es F, deducimos que el condicional  $P_1 \rightarrow P_2$  es F.

Por tanto: Al considerar que el condicional  $P_1 \rightarrow P_2$  es F, no hemos llegado a un absurdo, es decir, puede ocurrir que para una de 8 interpretaciones posibles, el condicional  $P_1 \rightarrow P_2$  sea Falso. De hecho, en la observación detallada del proceso podemos apreciar que para la interpretación  $r = F$ ,  $p = V$  y  $q = V$ , el condicional es Falso. Esto nos dice que  $P_1$  **no es suficiente para  $P_2$** .

Conclusión: La respuesta correcta es **b)**

### **Ejercicio nº 114.-** (Propuesto en junio de 2002)

Sean  $P_1: (q \vee r) \rightarrow p$  y  $P_2: (p \wedge q) \rightarrow r$

Se deduce o es consecuencia:

- a)  $P_2$  de  $P_1$ , pero no  $P_1$  de  $P_2$
- b)  $P_1$  de  $P_2$ , pero no  $P_2$  de  $P_1$
- c)  $P_1$  de  $P_2$  y  $P_2$  de  $P_1$
- d) Ni  $P_1$  de  $P_2$  ni  $P_2$  de  $P_1$

#### **Solución:**

Analicemos cada alternativa:

La alternativa **a)** propone que  $P_1 \rightarrow P_2$  es tautología y  $P_2 \rightarrow P_1$  no lo es.

La alternativa **b)** propone que  $P_2 \rightarrow P_1$  es tautología y  $P_1 \rightarrow P_2$  no lo es.

La alternativa **c)** propone que  $P_2 \rightarrow P_1$  es tautología y  $P_1 \rightarrow P_2$  también lo es.

La alternativa **d)** propone que ni  $P_2 \rightarrow P_1$  es tautología, ni  $P_1 \rightarrow P_2$  es tautología.

Para tomar una decisión construiremos las tablas de verdad de  $P_1 \rightarrow P_2$  y de  $P_2 \rightarrow P_1$

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge q$	$P_1: (q \vee r) \rightarrow p$	$P_2: (p \wedge q) \rightarrow r$	$P_1 \rightarrow P_2$	$P_2 \rightarrow P_1$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	F	V
V	F	V	V	F	V	V	V	V
F	V	V	V	F	F	V	V	F
V	F	F	F	F	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V	F
F	F	V	V	F	F	V	V	F
F	F	F	F	F	V	V	V	V

Observamos que ni  $P_1 \rightarrow P_2$  ni  $P_2 \rightarrow P_1$  son tautologías.

Conclusión: La alternativa correcta es **d)**

**Ejercicio nº 115.-**

De las premisas  $P_1: \neg(\neg p \wedge q)$

$$P_2: p \rightarrow (r \wedge q)$$

- a) Deducimos  $\neg q \vee r$  y  $\neg p \vee q$
- b) Deducimos  $\neg p \vee q$  pero no deducimos  $\neg q \vee r$
- c) Deducimos  $\neg q \vee r$  pero no deducimos  $\neg p \vee q$
- d) Ninguna de las anteriores respuestas.

**Solución:**

Emplearemos la Regla de Resolución. Para ello expresaremos las premisas en forma de clausulas:

$$P_1: \neg(\neg p \wedge q) \equiv \neg\neg p \vee \neg q \equiv p \vee \neg q$$

$$P_2: p \rightarrow (r \wedge q) \equiv \neg p \vee (r \wedge q) \equiv (\neg p \vee r) \wedge (\neg p \vee q)$$

La segunda premisa es una sentencia en forma clausulada que está formada por dos clausulas. Desglosando esa sentencia en dos que sean clausulas y ordenando:

$$P_1: p \vee \neg q \quad \text{es una clausula}$$

$$P_2: \neg p \vee r \quad \text{es una clausula}$$

$$P_3: \neg p \vee q \quad \text{es una clausula}$$

Observando las premisas vemos que tenemos como tal a  $\neg p \vee q$ , por lo que esta se puede considerar una deducción.

Observamos que en  $P_1$  y  $P_2$  aparecen  $p$  y  $\neg p$  respectivamente.

Por la Regla de Resolución deducimos la conclusión:

$$C: \neg q \vee r \quad \text{deducida de } P_1 \text{ y } P_2$$

Observamos que también hemos deducido  $\neg q \vee r$ .

Por tanto, con las premisas dadas hemos deducido  $\neg q \vee r$  y  $\neg p \vee q$

Conclusión: La alternativa correcta es a)

**Ejercicio nº 116.-**

La forma clausulada de la sentencia  $S: \neg p \rightarrow (p \wedge q)$  es:

- a)  $p \vee q$
- b)  $q \wedge (p \vee q)$
- c)  $p \wedge (p \vee q)$
- d) Ninguna de las anteriores respuestas.

**Solución:**

Tenemos la sentencia  $S: \neg p \rightarrow (p \wedge q)$  que se trata de un condicional.

Para expresarla en forma clausulada hacemos lo siguiente:

- ⇒ Eliminamos el condicional:  $S: \neg\neg p \vee (p \wedge q)$
- ⇒ Dos negaciones seguidas pueden eliminarse:  $S: p \vee (p \wedge q)$
- ⇒ Por la propiedad distributiva de  $\vee$  respecto de  $\wedge$ :  $S: (p \vee p) \wedge (p \vee q)$
- ⇒ Como en la clausula  $p \vee p$  aparece  $p$  dos veces, podemos eliminar una  $p$ :  
 $S: p \wedge (p \vee q)$

Por tanto: Tenemos la sentencia  $S$  expresada como la conjunción ( $\wedge$ ) de dos clausulas,  $p$  y  $p \vee q$ , es decir,  $S$  está en forma clausulada.

Conclusión: La respuesta correcta es **c)**

### **Ejercicio nº 117.-** (propuesto en junio de 2002)

Dadas las sentencias  $P_1: (q \vee r) \rightarrow p$

$P_2: (p \wedge q) \rightarrow r$

Entonces  $P_1 \oplus P_2$  es:

- a) Tautología
- b) Contradicción
- c) Indeterminación
- d) No es satisfacible

#### **Solución:**

Como  $P_1 \oplus P_2$  es una sentencia que depende de tres variables proposicionales ( $p$ ,  $q$  y  $r$ ), tenemos  $2^3=8$  interpretaciones distintas, por lo que es razonable elaborar una tabla de verdad.

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge q$	$P_1: (q \vee r) \rightarrow p$	$P_2: (p \wedge q) \rightarrow r$	$P_1 \oplus P_2$
V	V	V	V	V	V	V	F
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	V	F	V	V	F
V	F	F	F	F	V	V	F
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	F	V	V
F	F	F	F	F	V	V	F

Observando la última columna de la tabla, podemos comprobar que  $P_1 \oplus P_2$ :

- ⇒ No es tautología porque no todas son V. (La alternativa a) es falsa)
- ⇒ No es contradicción porque no todas son F. (La alternativa b) es falsa)
- ⇒ Es satisfacible, ya que para alguna interpretación es V (p.e. para  $p=V$ ,  $q=V$  y  $r=V$ )
- ⇒ Es una indeterminación, ya que hay V para alguna interpretación y F para otras.

Conclusión: La alternativa correcta es **c)**

**Ejercicio nº 118.-** (propuesto en junio de 2002)Dadas las sentencias  $P_1: (q \vee r) \rightarrow p$  $P_2: (p \wedge q) \rightarrow r$ Entonces  $P_1 \wedge \neg P_2$  es:

- a) Tautología                      b) Contradicción  
c) Indeterminación              d) Ninguna de las anteriores.

**Solución:**

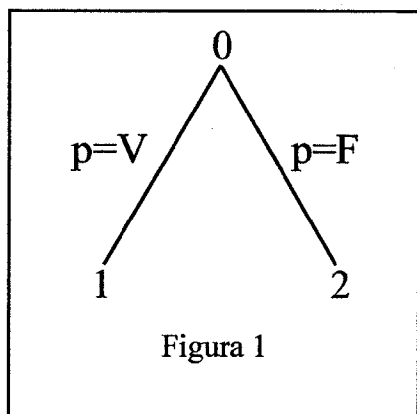
Vamos a resolver este ejercicio por dos métodos distintos.

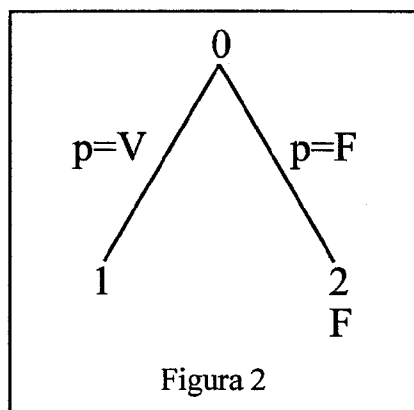
☺ **Primer método:** Por tabla de verdad.

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge q$	$P_1: (q \vee r) \rightarrow p$	$P_2: (p \wedge q) \rightarrow r$	$\neg P_2$	$P_1 \wedge \neg P_2$
V	V	V	V	V	V	V	F	F
V	V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	V	V	F	V	V	F	F
V	F	F	F	F	V	V	F	F
F	V	F	V	F	F	V	F	F
F	F	V	V	F	F	V	F	F
F	F	F	F	F	V	V	F	F

Observamos que la última columna es todo F excepto una V, es decir, la sentencia  $P_1 \wedge \neg P_2$  es falsa para cualquier interpretación excepto para una interpretación (concretamente para  $p=V, q=V$  y  $r=F$ ). Esto es indeterminación.

Conclusión: La alternativa correcta es c)

☺ **Segundo método:** Por árbol semántico.**Figura 1.-**✗ **Nodo 1 :**  $p = V$  Con este valor deducimos: $(q \vee r) = V$  o  $F$  depende de  $q$  y  $r$  $P_1 = [(q \vee r) \rightarrow p] = V$  por ser  $p = V$  $(p \wedge q) = V$  o  $F$  depende de  $q$  $P_2 = [(p \wedge q) \rightarrow r] = V$  o  $F$  depende de  $p \wedge q$  y  $r$  $\neg P_2 = \neg [(p \wedge q) \rightarrow r] = V$  o  $F$  depende de  $[(p \wedge q) \rightarrow r]$  $P_1 \wedge \neg P_2 = V$  o  $F$  depende de  $\neg P_2$ **Conclusión:** No podemos tomar una decisión

**Figura 2.-**

✗ **Nodo 2 :**  $p = F$  Con este valor deducimos:

$(q \vee r) = V$  o  $F$  depende de  $q$  y  $r$

$P_1 = [(q \vee r) \rightarrow p] = V$  o  $F$  depende de  $(q \vee r)$

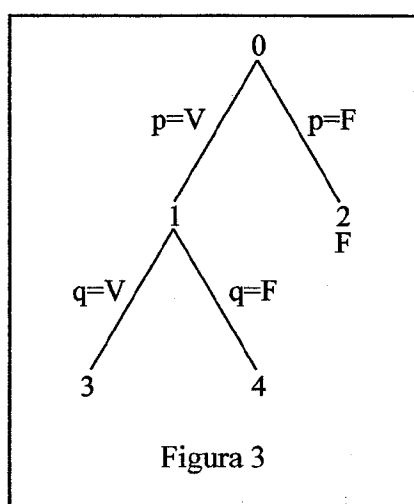
$(p \wedge q) = F$  por ser  $p = F$

$P_2 = [(p \wedge q) \rightarrow r] = V$  por ser  $(p \wedge q) = F$

$\neg P_2 = \neg[(p \wedge q) \rightarrow r] = F$  por ser  $P_2 = V$

$P_1 \wedge \neg P_2 = F$  por ser  $\neg P_2 = F$

**Conclusión:** Cuando  $p = F$  podemos asegurar que  $P_1 \wedge \neg P_2 = F$

**Figura 3.-**

✗ **Nodo 3 :**  $p = V$  y  $q = V$  Con estos valores deducimos:

$(q \vee r) = V$

$P_1 = [(q \vee r) \rightarrow p] = V$  por ser  $(q \vee r) = V$  y  $p = V$

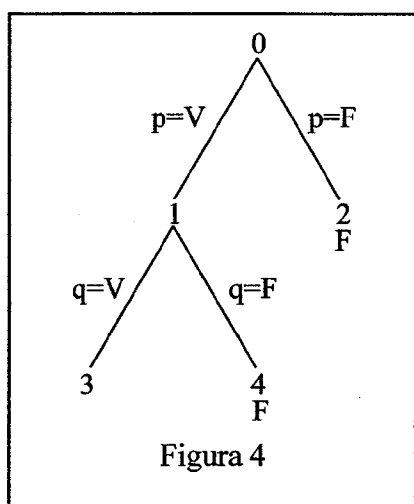
$(p \wedge q) = V$  por ser  $p = q = V$

$P_2 = [(p \wedge q) \rightarrow r] = V$  o  $F$  depende de  $r$

$\neg P_2 = \neg[(p \wedge q) \rightarrow r] = V$  o  $F$  depende de  $P_2$

$P_1 \wedge \neg P_2 = V$  o  $F$

**Conclusión:** Cuando  $p = q = V$  no podemos asegurar nada sobre  $P_1 \wedge \neg P_2$

**Figura 4.-**

✗ **Nodo 4 :**  $p = V$  y  $q = F$  Con estos valores deducimos:

$(q \vee r) = V$  o  $F$  depende de  $r$

$P_1 = [(q \vee r) \rightarrow p] = V$  por ser  $p = V$

$(p \wedge q) = F$  por ser  $p = V$  y  $q = F$

$P_2 = [(p \wedge q) \rightarrow r] = V$  por ser  $(p \wedge q) = F$

$\neg P_2 = \neg[(p \wedge q) \rightarrow r] = F$

$P_1 \wedge \neg P_2 = F$

**Conclusión:** Cuando  $p = V$  y  $q = F$  podemos asegurar que  $P_1 \wedge \neg P_2 = F$

Nótese que hasta ahora todo lo que hemos obtenido es que  $P_1 \wedge \neg P_2$  es FALSO para las distintas interpretaciones analizadas. Esto nos obliga a continuar con el proceso para comprobar si nos encontramos ante una contradicción o una indeterminación.

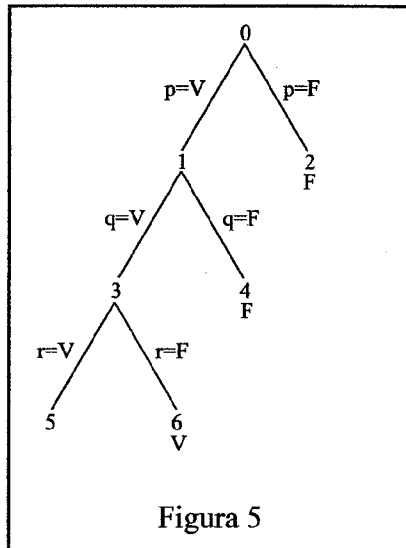


Figura 5

**Figura 5.-**

**X** **Nodo 6 :**  $p = V, q = V \text{ y } r = F$

Con estos valores deducimos:

$$(q \vee r) = V$$

$$P_1 = [(q \vee r) \rightarrow p] = V \text{ por antec. y consec.} = V$$

$$(p \wedge q) = V \text{ por ser } p = V \text{ y } q = V$$

$$P_2 = [(p \wedge q) \rightarrow r] = F \text{ por ser } (p \wedge q) = V \text{ y } r = F$$

$$\neg P_2 = \neg [(p \wedge q) \rightarrow r] = V$$

$$P_1 \wedge \neg P_2 = V$$

**Conclusión:** Cuando  $p = V, q = V \text{ y } r = F$  podemos asegurar que  $P_1 \wedge \neg P_2 = V$

Por tanto, existe, al menos una interpretación ( $p = V, q = V \text{ y } r = F$ ) para la cual la sentencia  $P_1 \wedge \neg P_2$  es VERDADERA y otras (por ejemplo cuando  $p = F$ ) en las que es FALSA. Esto nos permite concluir con que la sentencia  $P_1 \wedge \neg P_2$  es una INDETERMINACIÓN.

**Conclusión final:** La alternativa correcta es c)

### Ejercicio nº 119.-

La sentencia en lógica de predicados de primer orden  $\exists y(Py \rightarrow \forall xPx)$  es:

- a) Contradicción
- b) Tautología
- c) Satisfacible
- d) Ninguna de las anteriores respuestas.

#### Solución:

- ✎ La sentencia dice: "Existe algún elemento de  $U$  (universo del discurso) tal que si es  $P$  entonces todo elemento de  $U$  es  $P$ "
- ✎ Escribimos  $P = U$  para indicar que todo elemento es  $P$ , es decir, sustituimos la expresión  $\forall xPx$  por la expresión  $P = U$ , dejando claro que significa lo mismo.
- ✎ Con el criterio anterior, volvemos a escribir la sentencia:  $\exists y[Py \rightarrow (P = U)]$
- ✎ Eliminado el condicional en la última expresión:  $\exists y[\neg Py \vee (P = U)]$   
Es decir: "Existe un elemento de  $U$  que no es  $P$  o es  $P$  (porque todos son  $P$ ).
- ✎ El corchete de la expresión anterior puede eliminarse:  $\exists y \neg Py \vee (P = U)$
- ✎ Pero la expresión  $\exists y \neg Py$  (Algún elemento de  $U$  no es  $P$ ) equivale a decir que  $\neg P \neq \emptyset$ , es decir, el conjunto de elementos de  $U$  que no son  $P$  es distinto de vacío (hay elementos de  $U$  que no son  $P$ ), lo cual es equivalente a decir que  $P \neq U$ , es decir, no todos los elementos de  $U$  son  $P$ .
- ✎ El apartado anterior nos viene a decir que la expresión  $\exists y \neg Py \vee (P = U)$  es

equivalente a la expresión  $(P \neq U) \vee (P = U)$ , la cual es una tautología.

- ✎ Recordando que hemos partido de  $\exists y(Py \rightarrow \forall xPx)$  y hemos llegado a la expresión equivalente  $(P \neq U) \vee (P = U)$  que es una tautología, podemos concluir que:

**La sentencia  $\exists y(Py \rightarrow \forall xPx)$  es una tautología**

Conclusión: La alternativa correcta es **b)**

### Ejercicio nº 120.- (propuesto en junio de 2002)

¿Cuántas constantes de Skolem hacen falta introducir en  $P: \exists x \forall y (Pxy \rightarrow Rxy)$  ?

- a) Ninguna      b) Una      c) Dos      d) Catorce

#### **Solución:**

La expresión dice: “Existe un elemento  $x$  tal que cualquiera que sea otro elemento  $y$ , si  $x$  e  $y$  son  $P$ , entonces  $x$  e  $y$  son  $R$ ”.

Observamos que el cuantificador existencial ( $\exists$ ) no está afectado por el universal ( $\forall$ ), por lo que podemos considerar que existe un elemento  $a$  (constante) tal que cualquiera que sea  $y$  que verifique  $Pay$ , entonces se verifica  $Ray$ . Esto significa que podemos substituir  $x$  por una constante de Skolem  $a$ .

Si eliminamos los cuantificadores quedaría:

$P: \forall y (Pay \rightarrow Ray)$  hemos eliminado el  $\exists$

$P: Pay \rightarrow Ray$  hemos eliminado el  $\forall$

Por tanto, hace falta una constante de Skolem.

Conclusión: La respuesta es **b)**

### Ejercicio nº 121.-

En lógica de predicados de primer orden, la forma clausulada de  $P: \exists x \forall y (Pxy \rightarrow Rxy)$  es:

- a)  $P: \neg Pab \vee Rab$   
 b)  $P: \neg Pxf(x) \vee Rxf(x)$   
 c)  $P: \neg Pax \vee Rax$   
 d) Ninguna de las anteriores respuestas.

#### **Solución:**

- ☞  $P: \exists x \forall y (Pxy \rightarrow Rxy)$ . Sentencia que no está en forma clausulada.  
 ☞ Eliminamos el condicional:  $P: \exists x \forall y (\neg Pxy \vee Rxy)$   
 ☞ Eliminamos el cuantificador  $\exists$ . Como no está afectado por el  $\forall$ , podemos eliminarlo introduciendo una constante de Skolem:  $P: \forall y (\neg Pay \vee Ray)$   
 ☞ Ahora podemos eliminar el cuantificador universal:  $P: \neg Pay \vee Ray$   
 ☞ Podemos cambiar el nombre de la variable  $y$ , llamándole  $x$ :  $P: \neg Pax \vee Rax$

**Conclusión:** La alternativa correcta es **c)**

**Ejercicio nº 122.-** (propuesto en junio de 2002)

Cierto modelo o interpretación **M** consiste en:  $U = \{0, 1\}$  ;  $P = U$  ;  $Q = \emptyset$  ;  $R = \{(0, 1), (1, 0)\}$

En lógica con identidad, si **i** representa el descriptor, en el modelo **M** resulta correcto que:

- a)  $0 = ixRxx$                       b)  $1 = ix\forall yRxy$   
c)  $1 = ix(\neg Rxx)$                   d) Ninguna de las anteriores

**Solución:**

**Analicemos cada una de las alternativas:**

- a)  $0 = ixRxx$  Dice que 0 es el único elemento del universo  $U$  que está relacionado consigo mismo ( $R$  es la relación).  
Observamos que es falso, ya que 0 es un elemento de  $U$ , pero no está relacionado consigo mismo ya que  $(0,0) \notin R$
- b)  $1 = ix\forall yRxy$  Dice que 1 es el único elemento de  $U$  tal que cualquier otro elemento  $y \in U$  verifica que 1 está relacionado con  $y$ .  
Es falso ya que, aunque es cierto que  $(1,0) \in R$  (1 está relacionado con 0), no es cierto que  $(1,1) \in R$ , es decir, existe un elemento  $y=1$  de  $U$  tal que 1 no está relacionado con él.
- c)  $1 = ix(\neg Rxx)$  Dice que 1 es el único elemento del universo  $U$  tal que no está relacionado consigo mismo.  
Es falso, ya que, aunque 1 no está relacionado con 1,  $0 \in U$  y no está relacionado consigo mismo puesto que  $(0,0) \notin R$

Por tanto, las alternativas a), b) y c) son falsas.

**Conclusión:** La respuesta correcta es **d)**

**Ejercicio nº 123.-** (propuesto en junio de 2002)

La sentencia  $S: \forall xy(Qxy \rightarrow Pxy)$  es:

- a) Una tautología
- b) Satisfacible, pero no tautología
- c) Su negación es una contradicción permanente.
- d) No hay ningún ejemplo que satisfaga su negación.

**Solución:**

$S: \forall xy(Qxy \rightarrow Pxy)$  se interpreta de la siguiente forma:

“Para todo par de elementos  $x$ ,  $y$  del universo del discurso, si son  $Q$  (tienen la propiedad  $Q$ ), entonces son  $P$  (tienen la propiedad  $P$ )”.

Es fácil apreciar que no es tautología (universalmente cierto para todas las propiedades  $Q$  y  $P$ ), ni su negación será “siempre” contradicción (es decir, su negación será falsa para cualesquiera que sean las propiedades  $Q$  y  $P$ ).

Es fácil apreciar que en algunos casos será Verdad y en otros será Falso (depende de  $Q$  y  $P$ ), es decir, la sentencia  $S$  será satisfacible.

**Veamos un ejemplo donde  $S$  es Verdad.**

- Consideremos como universo al conjunto de los números naturales  $\mathbb{N}$ .
- Sea  $Q$  la propiedad de que la suma de dos elementos de  $\mathbb{N}$  sea múltiplo de 4.
- Sea  $P$  la propiedad de que la suma de dos elementos de  $\mathbb{N}$  sea múltiplo de 2.
- Es evidente que si  $Qxy$  ( $x$  e  $y$  son  $Q$ ) entonces  $Pxy$  ( $x$  e  $y$  son  $P$ ).

Hemos puesto un ejemplo donde la sentencia  $S$  es Verdadera.

Veamos un ejemplo donde  $S$  es Falsa

- Consideremos como universo al conjunto de los números naturales  $\mathbb{N}$ .
- Sea  $Q$  la propiedad de que la suma de dos elementos de  $\mathbb{N}$  sea múltiplo de 2.
- Sea  $P$  la propiedad de que la suma de dos elementos de  $\mathbb{N}$  sea múltiplo de 4.
- Es evidente que si  $Qxy$  ( $x$  e  $y$  son  $Q$ ), no podemos asegurar que  $Pxy$  ( $x$  e  $y$  son  $P$ ), aunque puedan serlo. Un caso:  $Q37$  ( $3+7=\text{par}$ ) y  $\neg P37$  ( $3+7 \neq \text{múltiplo de } 4$ ).

Hemos puesto un ejemplo donde la sentencia  $S$  es Falsa.

Por tanto, la sentencia  $S$  es satisfacible, pero no tautología (hay casos donde es V y otros F)

Conclusión: La alternativa correcta es **b)**

### Ejercicio nº 124.- (propuesto en junio de 2002)

Cierto modelo o interpretación **M** consiste en:  $U = \{0,1\}$ ;  $P = U$ ;  $Q = \emptyset$ ;  $R = \{(0,1), (1,0)\}$

El complemento de  $R$  en  $U \times U$  tiene un número de pares ordenados que es:

- a) 2                      b) 4                      c) 6                      d) 8

**Solución:**

✓ Construyamos el conjunto  $U \times U$ :  $U \times U = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$

✓ Construyamos el complemento de  $R$ :  $R^c = \{(0,0), (1,1)\}$

Observamos que  $R^c$  tiene dos elementos (pares ordenados)

Conclusión: La alternativa correcta es **a)**

### Ejercicio nº 125.-

Cierto modelo o interpretación **M** consiste en:  $U = \{0,1\}$ ;  $P = U$ ;  $Q = \emptyset$ ;  $R = \{(0,1), (1,0)\}$

De las siguientes alternativas, señala la correcta:

- a)  $\exists x(xRx)$                       b)  $\forall x[xRy \rightarrow \neg(yRx)]$   
 c)  $\exists x\neg(xRx)$                       d) Ninguna de las anteriores respuestas.

**Solución:**

Entendemos por  $xRy$  como “ $x$  está relacionado con  $y$ ”, es decir  $(x,y) \in R$ .

Analicemos cada uno de los apartados hasta encontrar la alternativa correcta:

✗ Apartado a)  $\exists x(xRx)$

Nos dice que “Existe un elemento de  $U$  tal que está relacionado consigo mismo”,

Es falso, ya que  $U = \{0,1\}$  y tenemos que:

$0 \in U$  y  $\neg(0R0)$  puesto que  $(0,0) \notin R$

$1 \in U$  y  $\neg(1R1)$  puesto que  $(1,1) \notin R$

X Apartado b)  $\forall xy [xRy \rightarrow \neg(yRx)]$

Nos dice: "Cualesquiera que sean dos elementos  $x, y$  de  $U$ , si  $xRy$  ( $x$  está relacionado con  $y$ ) entonces  $\neg(yRx)$  ( $y$  no está relacionado con  $x$ )".

Es falso, ya que  $U = \{0,1\}$  y tenemos que:

$0R1$  y  $1R0$  puesto que  $(0,1) \in R$  y  $(1,0) \in R$

$1R0$  y  $0R1$  puesto que  $(1,0) \in R$  y  $(0,1) \in R$

X Apartado c)  $\exists x \neg(xRx)$

Nos dice que "existe un elemento de  $U$  tal que no está relacionado consigo mismo"

Es verdad, puesto que existe  $0 \in U$  tal que  $\neg(0R0)$ . Con esto es suficiente para la veracidad del c), pero además, existe  $1 \in U$  tal que  $\neg(1R1)$ .

Conclusión: El apartado correcto es c)

### **Ejercicio nº 126.-** (propuesto en junio de 2002)

Consideremos las siguientes sentencias:

P : p no es posible

Q : p es necesaria

La expresión P equivale a:

a) Q

b)  $\neg Q$

c)  $Q \wedge \neg Q$

d) Ninguna de las anteriores.

**Solución:**

$[P : p \text{ no es posible}] \text{ equivale a } [P : p \text{ es imposible}]$

Analicemos a):

$[Q : p \text{ es necesario}]$  significa que p es seguro, es decir, no solamente no es imposible, sino que además es seguro (todo lo contrario que propone P).

Así que la alternativa a) es Falsa.

Analicemos b):

$[\neg Q : \neg(p \text{ es necesario})] \text{ equivale a } [\neg Q : p \text{ no es necesario}]$

$[\neg Q : p \text{ no es necesario}]$  significa que p no es seguro (no es necesario), pero esto no significa que sea imposible, es decir, puede que sea posible p.

Es decir, no es equivalente P a  $\neg Q$ . Por lo que la alternativa b) es Falsa.

Analicemos c):

$Q \wedge \neg Q$  Significa que ocurre Q y  $\neg Q$  (ocurre Q y no ocurre Q), lo cual es una contradicción siempre (sea quien sea Q), es decir,  $Q \wedge \neg Q$  es IMPOSIBLE. Luego, podemos considerar que P es equivalente a  $Q \wedge \neg Q$ . Por tanto, este apartado es Verdad.

Conclusión: La alternativa correcta es c).

**Ejercicio nº 127.-** (propuesto en junio de 2002)

Sea la proposición  $P: (q \vee r) \rightarrow p$  de la lógica trivalente de Lukasiewicz. Entonces, su valor de verdad para  $p = q = r = \frac{1}{2}$  sería:

- a) 0                      b)  $\frac{1}{2}$                       c) 2                      d) 1

**Solución:**

- ◇ De momento rechazamos la alternativa c) puesto que en la lógica trivalente de Lukasiewicz los valores de verdad posibles para una proposición son 0,  $\frac{1}{2}$  y 1
- ◇ Para averiguar el valor de verdad de P podríamos utilizar el método de construir la tabla de verdad, pero, al ser tres variables proposicionales ( $p, q, r$ ) y tres valores posibles (0, 1,  $\frac{1}{2}$ ) para cada una de ellas, nos encontraríamos con  $3^3 = 27$  interpretaciones posibles, es decir, una tabla demasiado extensa.
- ◇ Así que, mejor lo haremos empleando las fórmulas que propone Lukasiewicz para calcular el valor de verdad de una proposición para las lógicas multivalentes y en particular para la trivalente. Veamos:

$$\text{Valor de } (q \vee r) = \max(\text{valor de } q, \text{valor de } r) = \max(q, r) = \max\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Valor de } [(q \vee r) \rightarrow p] &= \min[1, (1 + \text{valor } p - \text{valor de } (q \vee r))] = \\ &= \min[1, (1 + p - (q \vee r))] = \min[1, (1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2})] = \\ &= \min[1, 1] = 1 \end{aligned}$$

Por tanto, el valor de la proposición  $P: (q \vee r) \rightarrow p$  es  $\frac{1}{2}$ .

Conclusión: La alternativa correcta es d)

**Ejercicio nº 128.-** (propuesto en junio de 2002)

Cierto modelo o interpretación **M** consiste en:  $U = \{0, 1\}$ ;  $P = U$ ;  $Q = \emptyset$ ;  $R = \{(0, 1), (1, 0)\}$  y  $R'$  es la recíproca o inversa de  $R$  en  $U \times U$ , entonces, el complemento de  $R \cap R'$  en  $U \times U$  tiene un número de elementos que es:

- a) 2                      b) 0                      c) 4                      d) 6

**Solución:**

$$\heartsuit \text{ Por definición } U \times U = \{(x, y) \mid x \in U \text{ e } y \in U\} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$$

$$\heartsuit \text{ Por definición } R' = \{(y, x) \in U \times U \mid (x, y) \in R\} = \{(1, 0), (0, 1)\} = R$$

♡ Por definición:

$$R \cap R' = \{(x, y) \in U \times U \mid (x, y) \in R \text{ y } (x, y) \in R'\} = \{(0, 1), (1, 0)\} = R = R'$$

♡ Por definición:

$$\overline{R \cap R'} = \{(x, y) \in U \times U \mid (x, y) \notin R \cap R'\} = \{(0, 0), (1, 1)\}$$

$$\text{Numero de elementos de } \overline{R \cap R'} = 2$$

Conclusión: La alternativa correcta es a)

**Ejercicio nº 129.-**

Consideremos el modelo siguiente:

Universo =  $U = \{a, e, i, o, u\}$ , las clases  $P = \{a, e, o\}$ ,  $Q = \{e, i, u\}$

y la relación  $R = \{(x, y) \mid Px \wedge \neg Qy\}$

Señalar el apartado verdadero:

- a)  $\neg(aRa)$
- b)  $\neg\exists x (Px \wedge Qx)$
- c)  $\forall x (\neg Qx \rightarrow \neg Px)$
- d)  $\exists x (Qx \rightarrow \neg Px)$

**Solución:**

Analicemos cada uno de los apartados hasta encontrar el que sea verdadero.

Apartado a): Nos dice que "a no está relacionado con a".

Observamos que:

$(a, a) \in R$  porque  $a \in P$  (a es P) y  $a \notin Q$  (a no es Q).

Esto significa que  $aRa$ , es verdadero, es decir,  $\neg(aRa)$  es falso.

Por tanto, la alternativa a) no es verdadera.

Apartado b): Nos dice que "no existe un elemento x del universo que es P (está en P) y también es Q (está en Q)".

Observamos que es FALSO porque "si existe un elemento (el elemento e) que es P y también es Q"

Por tanto, la alternativa b) no es verdadera.

Apartado c): Nos dice que "cualquier elemento del universo, si no es Q, entonces no es P"

Observamos que " $a \in U$ ,  $a \notin Q$  y sin embargo  $a \in P$ ", es decir, hay algún elemento que no es Q y sin embargo es P.

Por tanto, la alternativa c) no es verdadera.

Apartado d): Nos dice que "existe algún elemento que si es Q, entonces no es P".

Observamos que el elemento

$i \in Q$  (i es Q) y sin embargo no es P ( $i \notin P$ )

Por tanto, la alternativa d) es verdadera.

Conclusión: La alternativa correcta es **d)**

**Ejercicio nº 130.-**

Consideremos el universo  $U = \{0, 1, 2, 3\}$  y las relaciones entre elementos de ese universo siguientes:  $R = \{(0, 0), (0, 2)\}$  y  $S = \{(0, 1), (1, 2)\}$ . Entonces, la relación composición  $R \circ S$  es:

- a)  $R \circ S = \{(0, 1), (0, 2)\}$
- b)  $R \circ S = \{(0, 1)\}$
- c)  $R \circ S = \emptyset$
- d) Ninguna de las anteriores.

**Solución:**

- ⊕ Definamos la composición  $R \circ S$  :

$$R \circ S = \{ (x, y) \in U \times U \mid \exists z \in U (x, z) \in R \wedge (z, y) \in S \}$$

- ⊕ Construyamos la relación  $R \circ S$  :

$$(0, 0) \notin R \circ S \text{ porque } \neg \exists z \in U \mid (0, z) \in R \wedge (z, 0) \in S$$

$$(0, 1) \in R \circ S \text{ porque } \exists z = 0 \in U \mid (0, 0) \in R \wedge (0, 1) \in S$$

$$(0, 2) \notin R \circ S \text{ porque } \neg \exists z \in U \mid (0, z) \in R \wedge (z, 2) \in S$$

$$(1, 0) \notin R \circ S \text{ porque } \neg \exists z \in U \mid (1, z) \in R \wedge (z, 0) \in S$$

$$(1, 1) \notin R \circ S \text{ porque } \neg \exists z \in U \mid (1, z) \in R \wedge (z, 1) \in S$$

$$(1, 2) \notin R \circ S \text{ porque } \neg \exists z \in U \mid (1, z) \in R \wedge (z, 2) \in S$$

$$(2, 0) \notin R \circ S \text{ porque } \neg \exists z \in U \mid (2, z) \in R \wedge (z, 0) \in S$$

$$(2, 1) \notin R \circ S \text{ porque } \neg \exists z \in U \mid (2, z) \in R \wedge (z, 1) \in S$$

$$(2, 2) \notin R \circ S \text{ porque } \neg \exists z \in U \mid (2, z) \in R \wedge (z, 2) \in S$$

- ⊕ Observamos que  $R \circ S = \{ (0, 1) \}$

Conclusión: La alternativa correcta es b)

**Ejercicio nº 131.-** (propuesto en septiembre de 2002)

Si  $A$  es un conjunto borroso y  $A^c$  es su complementario:

- a)  $A \cup A^c = U$  para todo  $A$
- b)  $A \cap A^c = \emptyset$  para todo  $A$
- c)  $(A^c)^c = A$  para todo  $A$
- d)  $A \cup A^c = A$  para todo  $A$

**Solución:**

Analicemos cada uno de los apartados.

$U$  representa al universo. Todos los elementos pertenecen a  $U$  con grado de pertenencia 1.

$A \subset U$  es un conjunto borroso de  $U$ . Los elementos  $x$  de  $U$  pertenecen a  $A$  con un grado de pertenencia  $\mu_A(x)$  comprendido entre 0 y 1, es decir,  $0 \leq \mu_A(x) \leq 1$ . Consideramos que si  $\mu_A(x) = 0$ , entonces el elemento  $x$  no pertenece a  $A$ .

Analicemos el apartado a):  $A \cup A^c = U$  para todo  $A$  Verdadero o Falso.

- ⇒ Supongamos que  $a \in U$  y que  $\mu_A(a) = 0'4$ , es decir,  $A = \{ a \mid 0'4, \dots \}$
- ⇒ Por definición,  $\mu_{A^c}(a) = 1 - 0'4 = 0'6$ , es decir,  $A^c = \{ a \mid 0'6, \dots \}$ .
- ⇒ Por definición:

$$\mu_{A \cup A^c} = \max \{ \mu_A(a), \mu_{A^c}(a) \} = \max \{ 0'4, 0'6 \} = 0'6$$

Es decir:

$$A \cup A^c = \{ a \mid 0'6, \dots \} \neq U, \text{ es decir, } A \cup A^c = U \text{ es Falso.}$$

Por tanto, la alternativa **a)** es Falsa.

Analicemos el apartado **b)**:  $A \cap A^c = \emptyset$  para todo  $A \Leftrightarrow$  Verdadero o Falso.

- ⇒ Supongamos que  $a \in U$  y que  $\mu_A(a) = 0'4$ , es decir,  $A = \{a \mid 0'4, \dots\}$
- ⇒ Por definición,  $\mu_{A^c}(a) = 1 - 0'4 = 0'6$ , es decir,  $A^c = \{a \mid 0'6, \dots\}$ .
- ⇒ Por definición:

$$\mu_{A \cap A^c} = \min \{ \mu_A(a), \mu_{A^c}(a) \} = \min \{ 0'4, 0'6 \} = 0'4$$

Es decir:

$$A \cap A^c = \{a \mid 0'4, \dots\} \neq \emptyset, \text{ es decir, } A \cap A^c = \emptyset \text{ es Falso}$$

Por tanto, la alternativa **b)** es Falsa.

Analicemos el apartado **c)**:  $(A^c)^c = A$  para todo  $A \Leftrightarrow$  Verdadero o Falso.

- ⇒ Supongamos que  $a \in U$  y que  $\mu_A(a) = \alpha$ , es decir,  $A = \{a \mid \alpha, \dots\}$ . No olvidemos que  $0 \leq \alpha \leq 1$ .
- ⇒ Por definición  $\mu_{A^c}(a) = 1 - \alpha$ , es decir,  $A^c = \{a \mid 1 - \alpha, \dots\}$ .
- ⇒ El grado de pertenencia de  $a \in U$  al conjunto  $(A^c)^c$  será:

$$\mu_{(A^c)^c}(a) = 1 - \mu_{A^c}(a) = 1 - (1 - \alpha) = \alpha, \text{ es decir, } (A^c)^c = \{a \mid \alpha, \dots\} = A.$$

Por tanto, la alternativa **c)** es Verdadera.

Conclusión: La respuesta correcta es **c)**

### **Ejercicio nº 132.-** (propuesto en septiembre de 2002)

Para todos los conjuntos borrosos  $A$  y  $B$  tales que  $A \subset B$ :

- |                                    |                             |
|------------------------------------|-----------------------------|
| <b>a)</b> $A^c \subset B^c$        | <b>b)</b> $B^c \subset A^c$ |
| <b>c)</b> $A \cap B^c = \emptyset$ | <b>d)</b> $A^c \cup B = U$  |

**Solución:**

Analicemos una a una cada alternativa hasta dar con la correcta.

Analicemos la alternativa **a)**: ¿Si  $A \subset B$  entonces  $A^c \subset B^c$ ?  $\Leftrightarrow$  ¿Verdadero o Falso?

Por definición:  $A \subset B$  si  $\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \quad \forall x \in U$  (suponemos que esto se cumple)

Por definición:  $\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x)$  y  $\mu_{B^c}(x) = 1 - \mu_B(x)$

Por definición:  $A^c \subset B^c$  si  $\mu_{A^c}(x) \leq \mu_{B^c}(x) \quad \forall x \in U \Leftrightarrow$  ¿Verdadero o Falso?

Veamos:

$$\text{Si } A^c \subset B^c \text{ entonces } \mu_{A^c}(x) \leq \mu_{B^c}(x) \text{ entonces } 1 - \mu_A(x) \leq 1 - \mu_B(x)$$

$$\text{entonces } -\mu_A(x) \leq -\mu_B(x) \text{ entonces } \mu_A(x) \geq \mu_B(x) \quad \forall x \in U$$

entonces  $A \not\subset B$  (en contra de la hipótesis)

Es decir, suponiendo que  $A^c \subset B^c$  es verdadero hemos llegado a una contradicción, con la hipótesis.

Por tanto: La alternativa **a)** es Falsa.

Analicemos la alternativa b): ¿Si  $A \subset B$  entonces  $B^c \subset A^c$ ? ¿Verdadero o Falso?

Por definición:  $A \subset B$  si  $\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \quad \forall x \in U$  (suponemos que esto se cumple)

Por definición:  $\mu_{B^c}(x) = 1 - \mu_B(x)$  y  $\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x)$

Por definición:  $B^c \subset A^c$  si  $\mu_{B^c}(x) \leq \mu_{A^c}(x) \quad \forall x \in U$  ¿Verdadero o Falso?

Veamos:

Si  $A \subset B$  entonces  $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$  entonces  $-\mu_A(x) \geq -\mu_B(x)$   
 entonces  $-\mu_A(x) + 1 \geq -\mu_B(x) + 1$  entonces  $1 - \mu_A(x) \geq 1 - \mu_B(x)$   
 entonces  $\mu_{A^c}(x) \geq \mu_{B^c}(x)$  entonces  $\mu_{B^c}(x) \leq \mu_{A^c}(x) \quad \forall x \in U$   
 entonces  $B^c \subset A^c$

Por tanto, la alternativa b) es Verdad.

Conclusión: La respuesta correcta es b)

### **Ejercicio nº 133.-** (propuesto en septiembre de 2002)

Sea la interpretación I sobre el universo  $U = \{1,2\}$  siguiente:

$P = \{1\}$ ,  $Q = \{2\}$ ,  $R = \{(1,1)\}$  y  $S = \{(1,1), (1,2)\}$ .

La relación S satisface:

- |    |   |    |                                |
|----|---|----|--------------------------------|
| a) | $\forall x Sxx$                             | b) | $\exists x \exists y \neg Sxy$ |
| c) | $\forall x \forall y (Sxy \rightarrow Syx)$ | d) | $\forall x \neg Sxx$           |

#### **Solución:**

Analicemos cada una de las alternativas hasta dar con la correcta.

Alternativa a):  $\forall x Sxx$  Nos dice que cualquier elemento x del universo x está relacionado consigo mismo mediante la relación S. Dicho de otro modo, debe ocurrir que  $(1,1) \in S$  y  $(2,2) \in S$ .

Observamos que es FALSO ya que  $(2,2) \notin S$ .

Por tanto, la alternativa a) es Falsa.

Alternativa b):  $\exists x \exists y \neg Sxy$  Nos dice que existe un elemento x y otro elemento y (que pueden ser el mismo) tales que x no está relacionado con y. Expresado de otro modo, nos dice que existe un par ordenado  $(x,y) \in U \times U$  tal que no pertenece a la relación S, esto es,  $(x,y) \notin S$ .

Observamos que es VERDAD, puesto que el par  $(2,1)$  no pertenece a la relación S, es decir,  $\neg S21$  es Verdad

Por tanto, la alternativa b) es Verdad.

Conclusión: La respuesta correcta es b)

### **Ejercicio nº 134.-** (propuesto en septiembre de 2002)

Sea la interpretación I sobre el universo  $U = \{1,2\}$  siguiente:

$P = \{1\}$ ,  $Q = \{2\}$ ,  $R = \{(1,1)\}$  y  $S = \{(1,1), (1,2)\}$ .

La relación R satisface:

- |    |                           |    |                                |
|----|---------------------------|----|--------------------------------|
| a) | $\forall x \forall y Rxy$ | b) | $\forall x \exists y Rxy$      |
| c) | $\exists y \forall x Rxy$ | d) | $\exists x \neg \forall y Rxy$ |

**Solución:**

Analizamos cada una de las alternativas hasta encontrar la verdadera.

Analizamos la alternativa a):  $\forall x \forall y Rxy$  Nos dice que cualesquiera que sean  $x$  e  $y$  (dos elementos distintos o iguales) del universo  $U$ , están relacionados. Dicho de otra forma, "todos los elementos de  $U$  están relacionados entre sí mediante la relación  $R$ ".

Esta alternativa es Falsa, puesto que, 1 no está relacionado con 2, ni 2 con 1, ni 2 con 2 (mediante la relación  $R$ ).

Por tanto: La alternativa a) es Falsa.

Analizamos la alternativa b):  $\forall x \exists y Rxy$  Nos dice que para cualquier elemento  $x$  del universo, existe algún elemento  $y$  de  $U$ , tal que  $x$  está relacionado con  $y$  mediante la relación  $R$ . Dicho de otra forma, "todo elemento de  $U$  está relacionado con alguien de  $U$ ".

Esta alternativa es Falsa, ya que  $2 \in U$  y sin embargo  $\neg (R2y)$ , esto es, 2 no está relacionado con nadie.

Por tanto: La alternativa b) es Falsa.

Analizamos la alternativa c):  $\exists y \forall x Rxy$  Nos dice que existe algún elemento  $y$  de  $U$  tal que cualquier otro elemento (incluido ese  $y$ ) de  $U$  verifica que está relacionado con el primero (con  $y$ ). Dicho de otra forma, "hay un elemento de  $U$  con el que están relacionados todos los demás (incluido él mismo)."

Esta alternativa es Falsa, puesto que si elegimos  $y=1$ , vemos que  $\neg (R21)$ .

Por tanto: La alternativa c) es Falsa.

Analizamos la alternativa d):  $\exists x \neg \forall y Rxy$  Nos dice que existe algún elemento  $x$  de  $U$  tal que no está relacionado con todos los demás.

Esta alternativa es Verdadera, ya que  $x=1 \in U$  y observamos que  $\neg (R12)$ , es decir, existe el 1 tal que  $\neg \forall y R1y$ .

Por tanto: La alternativa d) es Verdad.

Conclusión: La alternativa correcta es **d)**

**Ejercicio nº 135.-** (propuesto en septiembre de 2002)

Sea la interpretación  $I$  sobre el universo  $U = \{1,2\}$  siguiente:

$P = \{1\}$ ,  $Q = \{2\}$ ,  $R = \{(1,1)\}$  y  $S = \{(1,1), (1,2)\}$ .

Consideremos las sentencias:

$$P_1 : \forall x \forall y (Rxy \rightarrow Sxy)$$

$$P_2 : \forall x \forall y (Sxy \rightarrow Px \vee Qy)$$

$$P_3 : \forall y (\neg Py \wedge \neg Qy)$$

En qué apartado las tres sentencias que se mencionan son verdaderas:

a)  $P_1, P_2, P_3$

b)  $P_1, P_2, \neg P_3$

c)  $P_1, \neg P_2, \neg P_3$

d)  $\neg P_1, P_2, \neg P_3$

**Solución:**

Analicemos cada una de las sentencias y su negación.

Sentencia  $P_1$  : Nos dice que dados dos elementos  $x$  e  $y$  cualesquiera del universo  $U$  ( $x$  e  $y$  pueden ser el mismo), si  $(x,y) \in R$  entonces  $(x,y) \in S$ .

Dicho de otra forma: "Si  $x$  está relacionado con  $y$  mediante  $R$ , entonces  $x$  está relacionado con  $y$  mediante  $S$ ".

Observamos que esta sentencia es Verdad porque  $(1,1)$  es el único par que está en  $R$  y vemos que también está en  $S$ , es decir, si  $(x,y)$  está en  $R$ , también está en  $S$ .

Sentencia  $\neg P_1$  : Es Falsa al ser  $P_1$  Verdadera.

Conclusión parcial: La alternativa d) no es la correcta.

Sentencia  $P_2$  : Nos dice que dados dos elementos cualesquiera  $x$  e  $y$  del universo  $U$  ( $x$  e  $y$  pueden ser el mismo), si  $(x,y) \in S$  entonces  $x \in P$  o  $y \in Q$ .

Dicho de otra forma: "Si el par  $(x,y)$  está en  $S$  entonces la primera componente está en  $P$  o/y la segunda componente está en  $Q$ ."

Observamos que es Verdad ya que :

❖  $(1,1) \in S$  y vemos que  $x=1 \in P$  e  $y=1 \notin Q$ , es decir,  $(1 \in P) \vee (1 \in Q)$

❖  $(1,2) \in S$  y vemos que  $x=1 \in P$  e  $y=2 \in Q$ , es decir,  $(1 \in P) \vee (2 \in Q)$

Sentencia  $\neg P_2$  : Es Falsa al ser  $P_2$  Verdadera.

Conclusión parcial: La alternativa c) no es la correcta.

Sentencia  $P_3$  : Nos dice que para cualquier elemento " $y$ " que tomemos del universo  $U$ , se verifica que " $y$ " no es  $P$  ( $y \notin P$ ) y " $y$ " no es  $Q$  ( $y \notin Q$ ).

Dicho de otra forma: "Cualquier elemento de  $U$  no es  $P$  y tampoco es  $Q$ "

Es Falso ya que:

$1 \in U$  y vemos que  $\neg P_1 = F$ ,  $\neg Q_1 = V$  y, por tanto,  $(\neg P_1 \wedge \neg Q_1) = F$

Sentencia  $\neg P_3$  : Es Verdad al ser  $P_3$  Falsa.

Por tanto, tenemos que  $P_1 = V$ ;  $P_2 = V$ ;  $\neg P_3 = V$

Conclusión final: La alternativa correcta es b)

**Ejercicio n° 136-** (propuesto en septiembre de 2002)

En cualquier interpretación que satisfaga la sentencia  $P: \forall x \forall y (Rxy \rightarrow Sxy)$ , entonces:

- a) Todo par de  $S$  es par de  $R$ .
- b) Si un par no pertenece a  $S$  entonces no pertenece a  $R$ .
- c) Si un par no pertenece a  $R$  entonces no pertenece a  $S$
- d)  $S$  debe contener, al menos, un par de elementos.

**Solución:**

La sentencia  $P$  nos dice:

*“Dados dos elementos  $x$  e  $y$  cualesquiera del universo  $U$  ( $x$  e  $y$  pueden ser el mismo), si  $(x,y) \in R$  entonces  $(x,y) \in S$ ”*

Si en la sentencia  $P$  eliminamos los cuantificadores, cambiamos el condicional y volvemos a poner los cuantificadores, tenemos (recuerda que  $A \rightarrow B$  es equivalente a  $\neg B \rightarrow \neg A$ )

$$\begin{aligned} P: \forall x \forall y (Rxy \rightarrow Sxy) &\equiv (Rxy \rightarrow Sxy) \equiv \\ &\equiv (\neg Sxy \rightarrow \neg Rxy) \equiv \forall x \forall y (\neg Sxy \rightarrow \neg Rxy) \end{aligned}$$

Es decir, la sentencia dada es equivalente a la sentencia  $Q: \forall x \forall y (\neg Sxy \rightarrow \neg Rxy)$

Esta última sentencia nos dice que:

*“Dados dos elementos  $x$  e  $y$  cualesquiera del universo  $U$  ( $x$  e  $y$  pueden ser el mismo), si  $(x,y) \notin S$  entonces  $(x,y) \notin R$ ”*

Es decir: “Si un par no pertenece a  $S$  entonces no pertenece a  $R$ ”

Conclusión: La alternativa correcta es **b)**

### **Ejercicio nº 137-** (propuesto en septiembre de 2002)

En forma clausulada, la sentencia  $S: \forall y (\neg Py \wedge \neg Qy)$  da lugar a:

- a) Dos cláusulas:  $(\neg Px) \wedge (\neg Qz)$
- b) Una cláusula:  $(\neg Px \wedge \neg Qx)$
- c) Una cláusula:  $(\neg Px \wedge \neg Qz)$
- d) Una cláusula con constante de Skolem:  $(Pa \wedge Qa)$

#### **Solución:**

Expresemos la sentencia  $S$  (lógica de predicados) en forma clausulada:

• Eliminamos el cuantificador universal:  $S: \neg Py \wedge \neg Qy$

La sentencia anterior está expresada en forma clausulada y está formada por dos cláusulas.

• Las dos cláusulas a las que nos referimos en el apartado anterior son:

$$S_1: \neg Py \quad \text{es una cláusula}$$

$$S_2: \neg Qy \quad \text{es otra cláusula}$$

• Cambiamos de nombre las variables de las cláusulas anteriores para que cada una tenga su propia variable (proceso de instanciación).

$$S_1: \neg Px \quad \text{es una cláusula}$$

$$S_2: \neg Qz \quad \text{es otra cláusula}$$

• Tenemos así dos cláusulas,  $S_1$  y  $S_2$ . Si las expresamos con una conjunción tendremos una sentencia en forma clausulada:  $(\neg Px) \wedge (\neg Qz)$

Conclusión: La alternativa correcta es **a)**

**Ejercicio nº 138-**

Consideremos el universo  $U = \{a, e, i, o, u\}$  y los conjuntos borrosos siguientes:

$$A = \{a|1, i|0'5, u|0'2\} \text{ y } B = \{a|1, e|0'5, i|0'3, u|0'2\}$$

Si  $I$  es la interpretación o valor de verdad, indica cuál de los apartados siguientes es verdadero:

- a)  $I(A(i) \vee B(e)) = 0'5 + 0'5 = 1$
- b)  $I(A(e) \vee B(u)) = 0 \cdot 0'2 = 0$
- c)  $I(A(a) \vee B(a)) = 1 - 1 = 0$
- d)  $I(A(u) \vee B(i)) = 0'3$

**Solución:**

Para cada elemento  $x \in U$  tenemos que:

- \*  $A(x)$  es una sentencia. Su valor de verdad es  $I(A(x)) = \mu_A(x)$  = grado de pertenencia de  $x$  al conjunto borroso  $A$ . Este conjunto se considera asociado a un predicado monádico  $A(x)$ . En nuestro caso es:

$$\begin{aligned} I(A(a)) = \mu_A(a) &= 1 & I(A(e)) = \mu_A(e) &= 0 & I(A(i)) = \mu_A(i) &= 0'5 \\ I(A(o)) = \mu_A(o) &= 0 & I(A(u)) = \mu_A(u) &= 0'2 \end{aligned}$$

- \*  $B(x)$  es una sentencia. Su valor de verdad es  $I(B(x)) = \mu_B(x)$  = grado de pertenencia de  $x$  al conjunto borroso  $B$ . Este conjunto se considera asociado a un predicado monádico  $B(x)$ . En nuestro caso es:

$$\begin{aligned} I(B(a)) = \mu_B(a) &= 1 & I(B(e)) = \mu_B(e) &= 0'5 & I(B(i)) = \mu_B(i) &= 0'3 \\ I(B(o)) = \mu_B(o) &= 0 & I(B(u)) = \mu_B(u) &= 0'2 \end{aligned}$$

Por definición, la interpretación de la disyunción de dos predicados monádicos  $A(x)$  y  $B(x)$  es (en este caso hay un sólo universo):

$$I(A(x) \vee B(y)) = \max(\mu_A(x), \mu_B(y)) \quad \forall x, y \in U$$

Según la definición anterior tenemos que:

- a)  $I(A(i) \vee B(e)) = \max(\mu_A(i), \mu_B(e)) = \max(0'5, 0'5) = 0'5 \neq 1$  (es Falsa)
- b)  $I(A(e) \vee B(u)) = \max(\mu_A(e), \mu_B(u)) = \max(0, 0'2) = 0'2 \neq 0$  (es Falsa)
- c)  $I(A(a) \vee B(a)) = \max(\mu_A(a), \mu_B(a)) = \max(1, 1) = 1 \neq 0$  (es Falsa)
- d)  $I(A(u) \vee B(i)) = \max(\mu_A(u), \mu_B(i)) = \max(0'2, 0'3) = 0'3$  (es Verdad)

Conclusión: la alternativa correcta es **d)**

**Ejercicio nº 139-**

Consideremos los universos  $U = \{\bullet, \blacksquare, \blacktriangle\}$  y  $V = \{\heartsuit, \diamond, \clubsuit, \spadesuit\}$  y los siguientes predicados monádicos:

$$\forall x A(x), \text{ siendo el conjunto borroso asociado } A = \{\blacksquare|1, \blacktriangle|0'8\} \subset U$$

$\forall x B(x)$ , siendo el conjunto borroso asociado  $B = \{ \nabla | 1, \diamond | 0.8, \oslash | 0.1 \} \subset V$   
Entonces, el valor de verdad de la sentencia  $A(\blacktriangle) \wedge B(\oslash)$  es:

a) 0.8

b) 0.1

c) 0

d) 0.7

**Solución:**

La expresión  $A(x) \wedge B(y)$  (hemos eliminado los cuantificadores) es la conjunción de dos predicados monádicos (en este caso borrosos). La definición de la interpretación para dicha conjunción es (en este caso hay dos universos):

$$I(A(x) \wedge B(y)) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \quad \forall x \in U \quad \forall y \in V$$

Para la sentencia concreta del enunciado tenemos:

$$I(A(\blacktriangle) \wedge B(\oslash)) = \min(\mu_A(\blacktriangle), \mu_B(\oslash)) = \min(0.8, 0) = 0$$

Conclusión: La alternativa correcta es c)

**Ejercicio nº 140-**

Imaginemos un universo  $U$  y un predicado borroso  $A(x)$ . Supongamos un elemento  $a \in U$  y la sentencia  $A(a)$ . Consideremos las sentencias construidas con modificadores lingüísticos siguientes:

- ☐ no  $A(a)$
- ☐ muy  $A(a)$
- ☐ casi  $A(a)$
- ☐ algo  $A(a)$

Suponiendo que  $0.5 < I(A(a)) < 1$ , ¿cuál de los siguientes apartados es correcto?

- a)  $I(\text{no } A(a)) < I(A(a)) < I(\text{muy } A(a))$
- b)  $I(\text{muy } A(a)) < I(\text{casi } A(a)) < I(\text{algo } A(a))$
- c)  $I(A(a)) < I(\text{algo } A(a)) < I(\text{casi } A(a))$
- d)  $I(\text{muy } A(a)) < I(A(a)) < I(\text{no } A(a))$

**Solución:**

Analicemos cada uno de los apartados hasta encontrar el correcto:

Apartado a):  $I(\text{no } A(a)) < I(A(a)) < I(\text{muy } A(a))$

Dado que  $0.5 < I(A(a)) < 1$  y utilizando la definición de V. Novak en la que  $I(\text{no } A(a)) = 1 - I(A(a))$ , tenemos que  $I(\text{no } A(a)) = 1 - I(A(a)) < 0.5$  puesto que  $I(A(a)) > 0.5$ .

Ahora bien, no podemos aceptar que  $I(A(a)) < I(\text{muy } A(a))$ , ya que si el elemento  $a \in U$  es  $A$  con un valor  $I(A(a)) = \mu_A(a)$ , será **muy**  $A$  con un valor menor, no mayor.

NOTA.- Por si tienes alguna duda piensa en la siguiente situación:

Juan (que mide 180 cm) es alto con un valor  $I(A(180)) = 0.8$ , pero es evidente que si "hablamos" de Juan como **muy** Alto, su valor será  $I(\text{muy } A(j)) < 0.8$ .

Por tanto, no debe ser  $I(A(a)) < I(\text{muy } A(a))$ .

Conclusión: La alternativa a) es Falsa.

Apartado b):  $I(\text{muy } A(a)) < I(\text{casi } A(a)) < I(\text{algo } A(a))$

Si el elemento  $a \in U$  es **muy A** con un valor  $I(\text{muy A}(a))$ , su valor como **casi A** será mayor que su valor como **muy A**, puesto que para pertenecer a **A** como **muy** se exige un valor más alto.

Podemos considerar que  $I(\text{muy A}(a)) < I(\text{casi A}(a))$  es correcto.

Ahora bien, no podemos aceptar que  $I(\text{casi A}(a)) < I(\text{algo A}(a))$  ya que si el elemento  $a \in U$  es **casi A** con cierto valor  $I(\text{casi A}(a))$ , su valor de verdad como **algo A** será menor, no mayor, es decir, debería ser la siguiente desigualdad:  $I(\text{algo A}(a)) < I(\text{casi A}(a))$ .

NOTA.- Si Álvaro (que mide 160 cm) es casi Alto (no llega a ser alto) con un valor 0'7 (por ejemplo), será algo Alto (este sí es el club de los altos) con un valor menor de 0'7, es decir, debemos considerar que  $I(\text{algo A}(a)) < I(\text{casi A}(a))$ .

Por tanto, no podemos aceptar que  $I(\text{casi A}(a)) < I(\text{algo A}(a))$

Conclusión: La alternativa **b)** es Falsa.

Apartado **c)**:  $I(A(a)) < I(\text{algo A}(a)) < I(\text{casi A}(a))$

Si  $a \in U$  es un elemento que es **A** con un valor  $I(A(a))$ , consideramos que es más contundente ser **A** que **algo A**, es decir, si nos dicen que "Juan es alto" y que "Álvaro es algo alto", nos imaginamos a Juan más alto que Álvaro. Es decir, si un elemento es **A** con un valor, será **algo A** con un valor superior. De este modo aceptamos que  $I(A(a)) < I(\text{algo A}(a))$ .

Si el elemento  $a \in U$  es **algo A** con un valor  $I(\text{algo A}(a))$ , será **casi A** (no llega a ser **A**) con un valor superior, es decir, si una persona es **algo alta** con un valor 0'6, es lógico pensar que será **casi alta** con un valor 0'8 (por ejemplo), es decir, debemos aceptar que  $I(\text{algo A}(a)) < I(\text{casi A}(a))$ .

Por tanto, damos como válido que  $I(A(a)) < I(\text{algo A}(a)) < I(\text{casi A}(a))$ , es decir, la alternativa **c)** es correcta.

Conclusión: La alternativa correcta es **c)**

### Ejercicio nº 141-

La sentencia de lógica de proposiciones  $S: (p \wedge q) \rightarrow \neg r$  en forma clausulada es:

- a)  $\neg p \wedge \neg q \vee \neg r$
- b)  $\neg p \vee \neg q \vee \neg r$
- c)  $\neg (p \wedge q) \vee \neg r$
- d) Ninguna de las anteriores.

#### Solución:

☞ Tenemos una sentencia  $S: (p \wedge q) \rightarrow \neg r$  de lógica de proposiciones. Se trata de un condicional. La sentencia no está en forma clausulada.

☞ Vamos a expresar  $S$  en forma clausulada. Para ello seguimos un proceso:

☆ Eliminamos el condicional:  $S: \neg (p \wedge q) \vee \neg r$

☆ Introducimos la negación dentro del paréntesis, en virtud de una de las leyes de Morgan:

$$S: (\neg p \vee \neg q) \vee \neg r$$

- ☆ Por la propiedad asociativa de la disyunción ( $\vee$ ), podemos eliminar el paréntesis:

$$S: \neg p \vee \neg q \vee \neg r$$

Se trata de una sentencia formada por una sola clausula, es decir, la disyunción de tres literales (en este caso negados).

Conclusión: La alternativa correcta es **b)**

### **Ejercicio nº 142-**

En lógica de proposiciones, dadas las premisas siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} P_1: p \rightarrow q \\ P_2: r \rightarrow \neg q \end{array} \right\}$$

se obtiene como conclusión:

- a) No se obtiene ninguna conclusión.
- b)  $p \vee r$
- c)  $\neg (p \wedge r)$
- d)  $p \vee \neg r$

#### **Solución:**

Para sacar conclusiones de las premisas dadas vamos a emplear el método de resolución. Para ello expresamos las premisas (sentencias) en forma clausulada:

$$\left. \begin{array}{l} P_1: (p \rightarrow q) \equiv \neg p \vee q \text{ es una clàusula.} \\ P_2: (r \rightarrow \neg q) \equiv \neg r \vee \neg q \text{ es otra clàusula} \end{array} \right\}$$

Tenemos dos premisas en forma de cláusulas (generatrices). En la primera está la variable proposicional  $q$  sin negar y en la segunda está la misma variable negada. Por la regla de resolución obtenemos como **resolvente** la conclusión :

$$C: \neg p \vee \neg r$$

Aplicando una de las leyes de Morgan:  $\neg p \vee \neg r \equiv \neg (p \wedge r)$

Por tanto, obtenemos como conclusión  $C: \neg (p \wedge r)$

Conclusión : La alternativa correcta es **c)**

### **Ejercicio nº 143-** (propuesto en junio de 2003)

En lógica de proposiciones tenemos las sentencias  $P_1: p \rightarrow q$  y  $P_2: p \leftrightarrow q$

Entonces:

- a)  $P_1$  es necesaria para  $P_2$
- b)  $P_1 \oplus P_2$  es tautología
- c)  $P_1 \rightarrow P_2$  es contradicción.
- d)  $P_1$  se deduce de  $\neg P_2$

**Solución:**

Analicemos la alternativa a) :

La frase “ $P_1$  es necesaria para  $P_2$ ” se interpreta como que el condicional  $P_2 \rightarrow P_1$  es una tautología. Para verlo, construimos la correspondiente tabla de verdad:

$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

Observamos que la sentencia  $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$  es una tautología.

Conclusión: La alternativa correcta es **a)**

NOTA: Destacamos en este caso que, a simple vista, puede apreciarse que la sentencia  $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$  es una tautología, ya que  $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$  es un teorema (es tautología).

**Ejercicio nº 144-** (propuesto en junio de 2003)

En lógica de proposiciones tenemos las sentencias  $P_1: p \rightarrow q$  y  $P_2: p \leftrightarrow q$

Entonces:

- a) En forma clausulada,  $P_1$  tiene un mínimo de dos cláusulas.
- b)  $P_2$  es consecuencia (se deduce) de  $P_1$ .
- c)  $P_1 \wedge \neg P_2$  es tautología.
- d)  $P_2$  es suficiente para  $P_1$ .

**Solución:**

Analicemos la alternativa a) :

Expresemos  $P_1: p \rightarrow q$  en forma clausulada :  $P_1: p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

$P_1: \neg p \vee q$  es la forma clausulada de  $P_1$ . Nótese que es **una sola** cláusula con dos literales.

La sentencia  $P_1$  la podemos expresar como dos sentencias de una sola cláusula cada una:

$$P_1: \begin{cases} P_1^1: \neg p & \text{es una cláusula} \\ P_1^2: q & \text{es una cláusula} \end{cases}$$

Por tanto: “La sentencia  $P_1$  tiene como mínimo una cláusula y como máximo dos.”

Por tanto: La alternativa **a)** es falsa.

Analicemos la alternativa b) :

La frase “ $P_2$  es consecuencia (se deduce) de  $P_1$ ” se interpreta como que la sentencia

$P_1 \rightarrow P_2$  es una tautología.

Para ver si es cierto, construimos la tabla de verdad:

$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Observamos que la sentencia  $P_1 \rightarrow P_2$  no es tautología porque es falsa para la interpretación  $p = F$  y  $q = V$ .

Por tanto, la alternativa **b)** es falsa.

Analicemos la alternativa **c)** :

Para ver si  $P_1 \wedge \neg P_2$  es tautología, construimos la tabla de verdad:

$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge (p \leftrightarrow q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Observamos que  $P_1 \wedge \neg P_2$  es tautología (es indeterminada).

Por tanto, la alternativa **c)** es falsa.

Analicemos la alternativa **d)** :

La frase " **$P_2$  es suficiente para  $P_1$** " se interpreta como que la sentencia  $P_2 \rightarrow P_1$  es una tautología. Para verlo, construimos la tabla de verdad:

$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

Observamos que  $P_2 \rightarrow P_1$  es tautología.

Conclusión: La alternativa correcta es **c)**.

NOTA: A simple vista puede resolverse este ejercicio sin más que tener en cuenta el teorema  $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ , por lo que "si  $P_2$ , entonces  $P_1$ "

**Ejercicio nº 145-** (propuesto en junio de 2003)

En lógica de proposiciones tenemos las sentencias  $P_1: p \rightarrow q$  y  $P_2: p \leftrightarrow q$

Entonces:

- a)  $\neg P_1$  es contradicción.
- b) De  $P_2$  se deduce  $P_2 \wedge \neg P_1$ .
- c)  $P_2 \rightarrow P_1$  es tautología.
- d)  $P_1 \wedge P_2$  es contradicción.

**Solución:**

Analicemos la alternativa a) :

Para que  $\neg P_1$  sea contradicción, debe ser  $P_1$  tautología. Veamos esto:

▲ Para la interpretación  $p = V$ ,  $q = V$ , el condicional  $P_1$  es V, esto es,  $P_1 = V$ .

▲ Para la interpretación  $p = V$ ,  $q = F$ , el condicional  $P_1$  es F, esto es,  $P_1 = F$ .

Por tanto,  $P_1$  no es tautología (es indeterminación), por lo que  $\neg P_1$  no es contradicción.

Conclusión: La alternativa a) es FALSA.

Analicemos la alternativa b) :

La expresión “**de  $P_2$  se deduce  $P_2 \wedge \neg P_1$** ” significa que  $P_2 \rightarrow P_2 \wedge \neg P_1$  es tautología.

Veamos si ese condicional es o no una tautología:

▼ Consideremos la interpretación  $p = V$ ;  $q = V$ . Es evidente que para esta es:  
 $P_1 = V$ ;  $\neg P_1 = F$ ;  $P_2 = V$  y  $P_2 \wedge \neg P_1 = F$

▼ Con los valores anteriores deducimos que el condicional  $P_2 \rightarrow P_2 \wedge \neg P_1$  es F, ya que el antecedente es verdadero y el consecuente es falso.

Por tanto,  $P_2 \rightarrow P_2 \wedge \neg P_1$  es no es tautología, ya que es **falsa** para una interpretación.

Conclusión: La alternativa b) es FALSA.

Analicemos la alternativa c) :

El condicional  $P_2 \rightarrow P_1$  es en forma desarrollada:  $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

A simple vista debe apreciarse que se trata de una tautología. Para explicar esto, demostremos que no puede darse el caso en que sea F. Veamos esto:

■ Para que  $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$  sea F debe ocurrir que  $(p \leftrightarrow q) = V$  y  $(p \rightarrow q) = F$

■ Para que  $(p \leftrightarrow q) = V$ , debe ocurrir que las variables  $p$  y  $q$  tengan el mismo valor de verdad, esto es,  $p = q = V$  o  $p = q = F$ .

■ Ahora bien, si  $p$  y  $q$  tiene el mismo valor de verdad, ocurre que  $(p \rightarrow q) = V$ , es decir, no puede ocurrir que  $(p \rightarrow q) = F$ , que es lo que hemos supuesto.

Por tanto, hemos supuesto que la sentencia dada no es tautología y hemos llegado a un absurdo o contradicción (validación por refutación).

Por tanto,  $P_2 \rightarrow P_1$  es tautología, es decir, c) es VERDAD.

Conclusión final : La alternativa **correcta** es c)

**Ejercicio nº 146-** (propuesto en junio de 2003)

Dadas las siguientes sentencias de lógica de predicados:  $P_1: \forall x \exists y (Pxy \rightarrow Qyx)$

$P_2: \forall x \exists y (Qxy \rightarrow Pxy)$  y  $P_3: \forall x \exists y (Pxy \leftrightarrow Qyx)$ , elige la opción correcta:

$P_2 : \forall x \exists y (Qxy \rightarrow Pyx)$  y  $P_3 : \forall x \exists y (Pxy \leftrightarrow Qyx)$ , elige la opción correcta:

- a) En forma clausulada,  $P_1$  tiene dos constantes de Skolem.
- b)  $M$  no satisface  $P_1$ .
- c) La negación de  $P_2$  es una contradicción.
- d)  $M$  satisface  $P_3$ .

### Solución:

Analicemos la alternativa a) :

Para ello expresemos  $P_1 : \forall x \exists y (Pxy \rightarrow Qyx)$  en forma clausulada.

- ① Eliminamos el condicional:  $P_1 : \forall x \exists y (\neg Pxy \vee Qyx)$
- ② Eliminamos el cuantificador existencial. Como está influenciado por un cuantificador universal, sustituimos la variable afectada por una función de Skolem:

$$P_1 : \forall x (\neg Pxf(x) \vee Qf(x)x)$$

- ③ Eliminamos el cuantificador universal:  $P_1 : \neg Pxf(x) \vee Qf(x)x$

La sentencia obtenida está en forma clausulada y formada por una sola cláusula.

Nótese que no tiene ninguna constante de Skolem. Tiene una única función de Skolem,  $f(x)$ .

Por tanto: La alternativa a) es FALSA.

Analicemos la alternativa b) :

Nos dice que:

La interpretación  $M : U = \{0, 1\}$  ;  $P = U \times U$  y  $Q = \emptyset \times \emptyset = \emptyset$  no satisface  $P_1$ , es decir, la interpretación  $M$  hace que  $P_1 : \forall x \exists y (Pxy \rightarrow Qyx)$  sea falso. Veamos:

$P_1 : \forall x \exists y (Pxy \rightarrow Qyx)$  significa que Para todo elemento  $x$  del universo  $U$ , existe otro elemento  $y$ , también de  $U$  tal que “si  $(x,y) \in P$ , entonces  $(y,x) \in Q$ ”.

Según la interpretación dada, es:  $P = U \times U = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$

Es evidente que esta sentencia es FALSA, ya que para  $x = 0$ , existe  $y = 1$  tal que  $(0,1) \in P$  y, sin embargo,  $(1,0) \notin Q$ . Por tanto,  $P_1 = F$ .

Es decir, la interpretación  $M$  **no satisface** la sentencia  $P_1$

Por tanto, la alternativa **correcta** es b)

### Ejercicio nº 147- (propuesto en septiembre de 2003)

Sea la interpretación  $M : U = \{0, 1\}$  ;  $P = U \times U \times U$  ;  $Q = \emptyset \times \emptyset = \emptyset$

Sean las sentencias:

$$P_1 : \forall x \exists y (Pyx \rightarrow Qyx)$$

$$P_2 : \forall x \exists y (Qxy \rightarrow Pyx)$$

$$P_3 : \forall x \exists y (Pxy \leftrightarrow Qyx)$$

Elige la opción correcta:

- a) En forma clausulada  $P_1$  tiene dos constantes de Skolem.
- b) La interpretación M satisface  $P_3$ .
- c) La negación de  $P_2$  es una contradicción.
- d) La interpretación M no satisface  $P_1$

Solución:

Analicemos la alternativa a) :

■ Expresemos  $P_1 : \forall x \exists y (P y y x \rightarrow Q y x)$  en forma clausulada :

- Eliminamos el condicional:  $P_1 : \forall x \exists y (\neg P y y x \vee Q y x)$
- Eliminamos el cuantificador existencial. Como está afectado por el universal, introducimos una función de Skolem:

$$P_1 : \forall x (\neg P f(x) f(x) x \vee Q f(x) x)$$

- Eliminamos el cuantificador universal:  $P_1 : \neg P f(x) f(x) x \vee Q f(x) x$

La última expresión es la forma clausulada de  $P_1$ . Nótese que está formada por una sola cláusula y que tiene una única función de Skolem,  $f(x)$ . . No tiene ninguna constante de Skolem.

Por tanto, la alternativa a) es FALSA.

Analicemos la alternativa b) :

■ Veamos si la interpretación M hace que  $P_3$  sea verdadera:

$$U = \{0, 1\} \text{ es el universo.}$$

$$P = U \times U \times U = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$$

$$Q = \emptyset \times \emptyset = \emptyset$$

} Es la interpretación

$P_3 : \forall x \exists y (P x y x \leftrightarrow Q y x)$  Significa que “Para todo  $x$  del universo  $U$  existe un elemento  $y$ , también de  $U$ , tal que la terna  $(x, y, x)$  está en  $P$  sí y sólo sí el par  $(y, x)$  está en  $Q$ ”.

Evidentemente es FALSO, puesto que, por ejemplo, para  $x = 0$ , existe  $y = 1$ , tal que la terna  $(0, 1, 0)$  pertenece a  $P$  y, sin embargo, el par  $(1, 0)$  no está en  $Q$  (ya que  $Q = \emptyset$ ).

Por tanto, la alternativa b) es FALSA.

■ Analicemos la alternativa c) :

Veamos si  $\neg P_2$  es una contradicción.

En este apartado el modelo M no tiene ninguna participación ya que la pregunta se refiere a que si  $\neg P_2$  es FALSO para cualquier modelo, es decir, si  $\neg P_2$  es una CONTRADICCIÓN. Veamos:

$$\neg P_2 : \neg \forall x \exists y (Qxy \rightarrow Pyyx) \quad \text{¿Será Falsa para toda interpretación o modelo M?}$$

Expresemos  $\neg P_2$  en forma clausulada:

$$\begin{aligned} \neg \forall x \exists y (Qxy \rightarrow Pyyx) &\equiv \exists x \neg \exists y (Qxy \rightarrow Pyyx) \equiv \exists x \forall y \neg (Qxy \rightarrow Pyyx) \equiv \\ &\equiv \exists x \forall y \neg (\neg Qxy \vee Pyyx) \equiv \exists x \forall y (Qxy \wedge \neg Pyyx) \equiv \\ &\equiv Qa y \wedge \neg Pyya \end{aligned}$$

Obsérvese que  $a$  es una constante de Skolem, mientras que  $y$  es una variable cuantificada universalmente.

La cuestión es la siguiente:

¿Para cualquier modelo  $M$  formado por un universo  $U$ , un conjunto o relación  $Q \subset U \times U$  y otro conjunto o relación  $P \subset U \times U \times U$  se verifica que  $Qay \wedge \neg Pyya$  es falso?

Es evidente que la respuesta a esta pregunta es NO, ya que se puede encontrar un modelo  $M$  que haga que  $Qay \wedge \neg Pyya$  sea Verdad. Busquemos uno:

$$M: U = \{0,1\}; Q = \{(1,0), (1,1)\} \subset U \times U; P = \{(0,0,0)\} \subset U \times U \times U$$

Observa que  $Q10 = \text{Verdad}$  porque  $(1,0) \in Q$  (en este caso  $a = 1; y = 0$ )

Observa que  $P110 = \text{Falso}$ , por lo que  $\neg P110 = \text{Verdad}$  ya que  $(1,1,0) \notin P$ .

Es decir:  $Qay \wedge \neg Pyya = V \wedge V = \text{Verdad}$ .

Por tanto, hemos encontrado una interpretación para la cual  $\neg P_2$  es Verdad, lo que hace que la propuesta de que  $\neg P_2$  es contradicción, es Falsa.

Conclusión: La alternativa c) es FALSA.

■ Analicemos la alternativa d) :

$M$  no satisface  $P_1: \forall x \exists y (Pyyx \rightarrow Qyx)$  ¿Verdad o Falso?

Veamos:

$M: U = \{0,1\}; P = U \times U \times U; Q = \emptyset \times \emptyset = \emptyset$  es el modelo

$P_1$ : Dice que "Para todo elemento  $x$  de  $U$ , existe otro elemento  $y$  de  $U$  tal que si la terna  $(y,y,x)$  está en  $P$ , entonces el par  $(y,x)$  está en  $Q$ ".

Para  $x = 0$  existe  $y = 1$  tal que  $(1,1,0) \in P$  y, sin embargo,  $(1,0) \notin Q$  ya que  $Q = \emptyset$ .

Lo anterior significa que el modelo dado  $M$  no satisface  $P_1$ .

Por tanto, la alternativa d) es Verdad.

Conclusión: La alternativa correcta es d)

### Ejercicio nº 148- (propuesto en junio de 2003)

Sean los siguientes predicados:

$$P_1: \forall x \exists y (Pxy \rightarrow Qyx)$$

$$P_2: \forall x \exists y (Qxy \rightarrow Pyx)$$

$$P_3: \forall x \exists y (Pxy \leftrightarrow Qyx)$$

Elige la respuesta correcta:

- a) De  $P_1$  y  $P_2$  se deduce  $\neg P_3$
- b) De  $P_1$  y  $P_2$  se deduce  $P_3$
- c) De  $P_2$  se deduce  $\neg P_1$
- d) De  $P_1$  no se deduce  $P_1 \wedge P_2$

**Solución:**

Tenemos las sentencias:

✎  $P_1: \forall x \exists y (Pxy \rightarrow Qyx)$

Para todo elemento  $x$  del universo  $U$ , existe otro elemento  $y$ , también de  $U$  tal que "si  $(x,y) \in P$ ,

entonces  $(y,x) \in Q$ ".

Es evidente que debe ocurrir que  $P \subset U \times U$  y  $Q \subset U \times U$ .  
Se entiende que  $Qxy$  es lo mismo que  $(x,y) \in Q$  y  $Pxy$  es lo mismo que  $(x,y) \in P$ .

$P_2 : \forall x \exists y (Qxy \rightarrow Pyx)$

Para todo elemento  $x$  del universo  $U$ , existe otro elemento  $y$ , también de  $U$  tal que "si  $(x,y) \in Q$ , entonces  $(y,x) \in P$ ".

$P_3 : \forall x \exists y (Pxy \leftrightarrow Qyx)$

Para todo elemento  $x$  del universo  $U$ , existe otro elemento  $y$ , también de  $U$  tal que " $(x,y) \in P$ , sí y sólo sí  $(y,x) \in Q$ ".

Analicemos la alternativa a) : Nos dice que de  $P_1$  y  $P_2$  se deduce  $\neg P_3$ , es decir:

Premisa 1:  $P_1$

Premisa 2:  $P_2$

Conclusion :  $\neg P_3$

Este enunciado nos propone que en todo modelo  $M$  en el que  $P_1$  y  $P_2$  sean verdad, se obtiene como conclusión  $\neg P_3$ , esto es,  $\neg P_3$  también es verdad.. ¿Habrá algún modelo  $M$  para el cual ocurra que  $P_1 = V$ ,  $P_2 = V$  y, sin embargo,  $\neg P_3 = F$  ?

Busquemos un modelo  $M$  que haga que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa.

- ❖ Consideremos el universo  $U = \{0, 1\}$ . Entonces,  $U \times U = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$
- ❖ Construyamos  $P \subset U \times U$  y  $Q \subset U \times U$  de modo que se verifiquen las premisas  $P_1$  y  $P_2$
- ❖ Vamos a ayudarnos de un esquema:

$U \times U$	0	1
0	$(0,0) \in P$	$(0,1) \in Q$
1		$(1,1) \in P$ y $(1,1) \in Q$

Tenemos que  $P = \{(0,0), (1,1)\}$  y  $Q = \{(0,1), (1,1)\}$

- ❖ Ahora comprobemos que se verifican las hipótesis, esto es, las premisas  $P_1$  y  $P_2$ .

$P_1 : \forall x \exists y (Pxy \rightarrow Qyx)$

para  $x = 0 \exists y = 1$  tal que si  $P01$  entonces  $Q10 \dots$  Verdad ya que  $\begin{cases} P01 = F \\ Q10 = F \end{cases}$

para  $x = 1 \exists y = 1$  tal que si  $P11$  entonces  $Q11 \dots$  Verdad ya que  $\begin{cases} P11 = V \\ Q11 = V \end{cases}$

Por tanto, este modelo satisface  $P_1$ .

$P_2 : \forall x \exists y (Qxy \rightarrow Pyx)$

para  $x = 0 \exists y = 0$  tal que si  $Q00$  entonces  $P00 \dots$  Verdad ya que  $\begin{cases} Q00 = F \\ P00 = V \end{cases}$

para  $x = 1 \exists y = 1$  tal que si  $Q11$  entonces  $P11 \dots$  Verdad ya que  $\begin{cases} Q11 = V \\ P11 = V \end{cases}$

Por tanto, el modelo que hemos construido  $M$ , verifica la premisa  $P_2$ .

- ❖ Ahora tenemos que ver si el modelo  $M$  hace que  $\neg P_3$  es Falso. Si esto es así, entonces hemos encontrado un modelo  $M$  que hace que  $P_1 = V$ ,  $P_2 = V$  y  $\neg P_3 = F$ , es decir, de  $P_1$  y  $P_2$  no se deduce  $\neg P_3$ .

Veamos:

$$P_3: \forall x \exists y (Pxy \leftrightarrow Qyx)$$

$$\text{para } x = 0 \exists y = 1 \text{ tal que } P01 \leftrightarrow Q10 \dots \text{Verdad ya que } \begin{cases} P01 = F \\ Q10 = F \end{cases}$$

$$\text{para } x = 1 \exists y = 1 \text{ tal que } P11 \leftrightarrow Q11 \dots \text{Verdad ya que } \begin{cases} P11 = V \\ Q11 = V \end{cases}$$

Por tanto, el modelo  $M$  hace que  $P_3 = V$ , o sea,  $\neg P_3 = F$ .

Podemos asegurar que “de  $P_1$  y  $P_2$  no se deduce  $\neg P_3$ ” porque hay un modelo (al menos) que verifica  $P_1$ ,  $P_2$  no verifica  $\neg P_3$ .

Deducimos que la alternativa a) es Falsa.



Analicemos la alternativa b) :

Como sospechamos que de  $P_1$  y  $P_2$  no se deduce  $P_3$ , buscaremos, al igual que antes, un modelo  $T$  que verifique las premisas  $P_1$  y  $P_2$  y, sin embargo, no verifique  $P_3$ .

Consideramos  $T: U = \{0,1\}$ ,  $P \subset U \times U$  y  $Q \subset U \times U$

El modelo anterior no nos sirve porque vimos que se verifican las premisas y también se verificaba  $P_3$  (era  $P_3 = V$ ). Construyamos uno nuevo:

$U \times U$	0	1
0	$(0,0) \in P$	
1	$(1,0) \in Q$	$(1,1) \in P$ y $(1,1) \in Q$

En este caso  $P = \{(0,0), (1,1)\}$  y  $Q = \{(0,1), (1,1)\}$

Ahora debemos ver que este modelo  $T$  verifica las premisas:

$$P_1: \forall x \exists y (Pxy \rightarrow Qyx)$$

$$\text{para } x = 0 \exists y = 1 \text{ tal que } P01 \rightarrow Q10 \dots \text{Verdad ya que } \begin{cases} P01 = F \\ Q10 = V \end{cases}$$

$$\text{para } x = 1 \exists y = 1 \text{ tal que } P11 \rightarrow Q11 \dots \text{Verdad ya que } \begin{cases} P01 = V \\ Q10 = V \end{cases}$$

Por tanto, el modelo  $T$  verifica la premisa  $P_1$ .

$$P_2: \forall x \exists y (Qxy \rightarrow Pyx)$$

$$\text{para } x = 0 \exists y = 1 \text{ tal que } Q01 \rightarrow P10 \dots \text{Verdad ya que } \begin{cases} Q01 = F \\ P10 = F \end{cases}$$

$$\text{para } x = 1 \exists y = 1 \text{ tal que } Q11 \rightarrow P11 \dots \text{Verdad ya que } \begin{cases} Q11 = V \\ P11 = V \end{cases}$$

Por tanto, el modelo  $T$  satisface la premisa  $P_2$ , esto es, verifica ambas premisas.

Ahora deberemos ver que el modelo  $T$  no verifica la supuesta conclusión  $P_3$

$$P_3: \forall x \exists y (Pxy \leftrightarrow Qyx)$$

$$\text{para } x = 0 \quad \exists y = 0 \text{ tal que } P00 \leftrightarrow Q00 \dots \text{Falso ya que } \begin{cases} P00 = V \\ Q00 = F \end{cases}$$

$$\text{para } x = 0 \quad \exists y = 1 \text{ tal que } P01 \leftrightarrow Q10 \dots \text{Falso ya que } \begin{cases} P01 = F \\ Q10 = V \end{cases}$$

Por tanto, tenemos que para  $x = 0$  no existe un  $y$  tal que  $P0y \leftrightarrow Qy0$  sea verdad.

Se deduce que el modelo T no verifica la supuesta conclusión  $P_3$

De  $P_1$  y  $P_2$  no se deduce  $P_3$

La alternativa b) es Falsa.

∞ Analicemos la alternativa c) : De  $P_2$  se deduce  $\neg P_1$

$$P_2: \forall x \exists y (Qxy \rightarrow Pxy) \equiv \forall x \exists y (\neg Qxy \vee Pxy) \equiv \forall x (\neg Qxf(x) \vee Pf(x)x) \equiv \neg Qxf(x) \vee Pf(x)x$$

$$\neg P_1: \neg \forall x \exists y (Pxy \rightarrow Qyx) \equiv \exists x \forall y \neg (Pxy \rightarrow Qyx) \equiv \exists x \forall y \neg (\neg Pxy \vee Qyx) \equiv \exists x \forall y (Pxy \wedge \neg Qyx)$$

Buscamos un modelo que haga que  $P_2$  sea Verdad y  $\neg P_1$  sea Falso:

$U \times U$	0	1
0	$(0,0) \in P$	$(0,1) \in Q$
1	$(1,0) \in Q$	

Comprobemos que la sentencia  $P_2$  es Verdad para este modelo:

$$\text{Para } x = 0, \exists y = 0 \text{ tal que } Q00 \rightarrow P00 \dots \text{Verdad ya que } \begin{cases} Q00 = F \\ P00 = V \end{cases}$$

$$\text{Para } x = 1, \exists y = 1 \text{ tal que } Q11 \rightarrow P11 \dots \text{Verdad ya que } \begin{cases} Q11 = F \\ P11 = F \end{cases}$$

Comprobemos ahora que la sentencia  $\neg P_1$  es Falsa:

¿Existe un  $x \in U$  tal que para todo  $y \in U$  se verifica que  $Pxy \wedge \neg Qyx$  ? Veamos:

Si consideramos que  $x = 0$  tenemos que:

$$\text{Para } y = 0 \quad P00 \wedge \neg Q00 = V \wedge \neg F = V \wedge V = V$$

$$\text{Para } y = 1 \quad P01 \wedge \neg Q10 = F \wedge \neg V = F \wedge F = F$$

Por tanto, para  $x = 0$ , no todo  $y \in U$  verifica que  $P0y \wedge \neg Qy0$  es Verdad

Si consideramos que  $x = 1$  tenemos que:

$$\text{Para } y = 0 \quad P10 \wedge \neg Q01 = F \wedge \neg V = F \wedge F = F$$

Por tanto, para  $x = 1$ , no todo  $y \in U$  verifica que  $P1y \wedge \neg Qy1$  es Verdad.

Por tanto:

Para el modelo construido, ocurre que  $P_2 = V$  y  $\neg P_1 = F$ , por lo que  $P_2 \rightarrow \neg P_1$  es F, esto es, de  $P_2$  no se deduce  $\neg P_1$ .

La alternativa c) es Falsa.

∞ Analicemos la alternativa d) : De  $P_1$  no se deduce  $P_1 \wedge P_2$

Tenemos que analizar el condicional  $P_1 \rightarrow P_1 \wedge P_2$

Veamos:

- Si  $P_1 \rightarrow P_1 \wedge P_2$  fuese Verdad para todo modelo, entonces diríamos que de  $P_1$  si se deduce  $P_1 \wedge P_2$
- Si encontramos un modelo para el cual  $P_1 = V$  y  $P_1 \wedge P_2 = F$ , entonces tendríamos un condicional  $V \rightarrow F$ , es decir, de  $P_1$  no se deduce  $P_1 \wedge P_2$

Veamos si somos capaces de encontrar un modelo que verifique esto último. Consideremos el siguiente:

$U \times U$	0	1
0	$(0,0) \in Q$	$(0,1) \in Q$
1		$(1,1) \in P$

Comprobemos que  $P_1 : \forall x \exists y (P_{xy} \rightarrow Q_{yx})$  es Verdad para este modelo:

Para  $x = 0, \exists y = 0$  tal que  $P_{01} \rightarrow Q_{10}$  es Verdad, ya que  $\begin{cases} P_{01} = F \\ Q_{10} = F \end{cases}$

Para  $x = 1, \exists y = 0$  tal que  $P_{10} \rightarrow Q_{01}$  es Verdad, ya que  $\begin{cases} P_{10} = F \\ Q_{01} = V \end{cases}$

Por tanto,  $P_1 : \forall x \exists y (P_{xy} \rightarrow Q_{yx})$  es Verdad para este modelo.

Comprobemos que  $P_1 \wedge P_2 = F$  para este modelo.

Como  $P_1 = V$ , debemos ver que  $P_2 = F$ . Veamos:

$P_2 : \forall x \exists y (Q_{xy} \rightarrow P_{yx})$  es Falsa para el modelo descrito. En efecto:

Para  $x = 0 \begin{cases} \exists y = 0 \text{ tal que } Q_{00} \rightarrow P_{00} \text{ es Falso, ya que } \begin{cases} Q_{00} = V \\ P_{00} = F \end{cases} \\ \exists y = 1 \text{ tal que } Q_{01} \rightarrow P_{10} \text{ es Falso, ya que } \begin{cases} Q_{01} = V \\ P_{10} = F \end{cases} \end{cases}$

Es decir, para  $x = 0$  no existe un  $y \in U$  tal que se verifique que  $Q_{0y} \rightarrow P_{y0}$ , es decir, para este modelo,  $P_2 = F$  y por tanto,  $P_1 \wedge P_2 = F$ .

Hemos encontrado un modelo para el cual  $P_1 = V$  y  $P_1 \wedge P_2 = F$ , por lo que podemos asegurar que de  $P_1$  no se deduce  $P_1 \wedge P_2$

Por tanto: La propuesta d) es Verdad.

Conclusión: La alternativa correcta es d)

